ELEMENTI DELLE MATEMATICHE OVVERO TRATTATO DELLA GRANDEZZA IN…

ELEMENTI

DELLE

MATEMATICHE.



ELEMENTI
DELLE
MATEMATICHE,
OVVERO
TRATTATO DELLA GRANDEZZA IN GENERALE,
Che contiene in tutta la fua eftefa
L'ARITMETICA, L'ALGEBRA, E L'ANALISI;
Aggiuntavi l'invenzione, e la fpiegazione delle Permutazioni, e del Binomio e Infinitinomio di Newton,
Del Triangolo Aritmetico, delle Serie Infinite, e delle Combinazioni colla loro applicazione ai Giuochi di azzardo.

TOMO SECONDO.



In VENEZIA, MDCCXLIV.
Preffo GIAMBATISTA PASQUALI.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

TAVOLA DELLE SEZIONI E DE' CAPI

Contenuti in questo Secondo Tomo.

LIBRO QUINTO.

Delle Frazioni, e delle Operazioni Aritmetiche sopra le Frazioni e sopra le Ragioni.

SEZIONE PRIMA.

Preparazione per far le operazioni dell'Aritmetica sopra le Frazioni e sopra le Ragioni.

CAP. I.

CAP. II.

CAP. III.

SEZIONE II.

CAP. I.

CAP. II.

SEZIONE III.

CAP. I.

CAP. II.

CAP.

CAP. III.

LIBRO SESTO.

Delle Grandezze incommensurabili.

SEZIONE I.

CAP. I.

CAP. II.

SEZIONE II.

SEZIONE III.

CAP. I.

CAP. II.

CAP. III.

CAP. IV.

CAP. V.

SEZIONE IV.

CAP. I.

CAP. II.

CAP.

C A P. III.

LIBRO SETTIMO.

Del metodo di risolvere una Questione o Problema.

S E Z I O N E I.

C A P. I.

C A P. II.

C A P. III.

CAP.

x

CAP.

Errori scorsi in questo Secondo Tomo da corregersi prima di leggere.

Pag.	lin.	Errori	*Leggasi.*
49.	27.	picciole	grandi
	30	piccolezza	grandezza
79	20	1 cc.	*a*. 1. cc.
114	13	*ab*	a *b*
143	2	*b*—*c*	*a*—*b*
204	17	+4	—4
208	pen.	lasciarebbe il Problema irresoluto, *leggasi* indicherà il Problema insolubile.	
220	12	$\frac{a+b}{a^n}$	$\overline{a+b}^n$
249	2	*abmna*—*bn*	*abmn*—*abn*
294	9	$=\frac{2499}{51}$	1479=2499
314	17	*xy*	*by*

pag. 334	lin. 6	$+xx=$	leggasi	$+xx+yy=$
336	10	$=gg$ ec.		$=ggzz$ ec.
338	17	$x3$		$x+3$
339	14	$-2bt$		$-2btz$
340	5	$t\frac{-b}{\sqrt{a}}$ è maggiore		t è minore
345	6	*essendo moltiplicata*		
		leggasi *essendo il suo quadrato moltiplicata*		
		pen. axx		$aaxx$
361	24	$-z^2 f^3$		$-z^3 f^3$
362	11	$pp-n$		$pp-2n$
363	pen.	noto		nato

Si cambi l'Esempio della pag. 134 in questo

$$\begin{array}{l} a+b+2\sqrt{b}. \\ \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \hline a\sqrt{a}+b\sqrt{a}+2\sqrt{ab}+a\sqrt{b} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +b\sqrt{b}+2b \\ \hline a\sqrt{a}+b\sqrt{a}+2\sqrt{ab}+\overline{a+b}\times\sqrt{b}+2b \end{array}$$

ELE-

ELEMENTI DELLE MATEMATICHE,

OVVERO

TRATTATO DELLA GRANDEZZA IN GENERALE.

LIBRO QUINTO.

Delle Frazioni, e delle Operazioni Aritmetiche, sopra le Frazioni, e sopra le Ragioni.

SEZIONE PRIMA.

Preparazione per far le operazioni dell' Aritmetica sopra le Frazioni, e sopra le Ragioni.

CAP. I.

Le Frazioni essendo modi di esprimere una ragione, sono perciò ragioni.

LE Frazioni o numeri rotti, sono modi di esprimere la ragione, che due o molti numeri hanno fra di loro, perciò sono ragioni; sicchè non mi meraviglio, che un valente uomo abbia detto, che 1.

per lo passato non si aveva riguardo di fare tutte le quattro Operazioni Aritmetiche sopra le ragioni, poichè sempre sono state sommate, sottratte, moltiplicate e divise le frazioni, che sono vere ragioni.

I segni ne' quali le frazioni consistono, sono naturalissimi, cioè sono proprj per indicare ciò, che si vuol ch'esprimano. P. e. si chiama frazione questo segno $\frac{5}{6}$, il quale dinota, che una grandezza intiera è stata rotta in 6 parti, ovvero ch'ella ha sei patti, de' quali non se ne prende che cinque. Questa espressione, dico, $\frac{5}{6}$ è propria per segnare una ragione, perchè *ragione*, come più volte s'è detto, è un modo di contenere o di essere contenuto; il che si conosce per via della divisione, che fa vedere, quante volte una grandezza è contenuta in un'altra, e il quoziente della divisione di due grandezze è l'esponente della loro ragione. Ora s'è veduto, che il segno generale della divisione è una piccola linea, sopra la quale si pone la grandezza da dividere, e disotto il divisore; p. e. dividendo b per c si scrive $\frac{b}{c}$. Il quoziente di b diviso per c essendo dunque $\frac{b}{c}$, questa espressione è propria per segnare la ragione di b a c; onde $\frac{5}{6}$ essendo un segno, per cui bisogna concepire che 5 è diviso per 6, questa nota esprime la ragione di 5 a 6.

Abbiamo detto fino nel primo Libro, che quando il divisore è più grande del numero da dividere, bisogna porre sotto questo numero da dividere il divisore stesso. P. e. dividendo 5 per 6, si dee scrivere $\frac{5}{6}$, della qual regola si vede ora la ragione. Questa espressione si chiama una frazione; perchè, come si dirà, si suppone che ciascuna unità del residuo del numero da dividere sia rotta in tante parti, quante unità vi sono nel divisore. P. e. se 5 sono cinque Scudi, che restano da dividere, o da partire a sei persone; siccome ciascheduno non può avere uno scudo, poichè ve ne sono solamente 5, si concepisce che ogni scudo sia diviso in sei parti, e quindi questa espressione $\frac{5}{6}$ dice, che cinque scudi divisi a sei persone, ciascheduna di queste persone ha cinque di quelle parti, de' quali lo scudo ne val 6. Vedete dunque perchè queste espressioni chiamansi *Frazioni*, e che $\frac{5}{6}$ è un numero rotto, a cagione che 6 è un numero, che segna l'unità rotta in sei parti; il che noi spiegheremo con attenzione e facilmente, imperciocchè sono stati stabiliti tutt' i principj, e queste frazioni non sono che ragioni.

CAP. II.

Definizioni, e spiegazioni dei termini. Assiomi ovvero proposizioni evidenti circa le Frazioni.

PRIMA DEFINIZIONE.

2. *Frazione è una espressione che dinota il rapporto della parte di un numero intiero, rotto e diviso in quante parti s' è voluto, con questo numero intiero.*

Sia *a* una grandezza intiera, p. e. una pertica; e avendo rotto questo numero intiero *a* in 12 parti, si ponga come s' è detto, questo numero 12, che segna in quante parti la grandezza *a* ovvero l' unità è rotta, sotto una picciola linea in questo modo, $\overline{12}$. Dopo per esprimere il numero delle parti di *a*, sia sei, sia quattro, o qualunque altro numero di parti, si ponga sopra questa linea il numero delle parti che si vuol esprimere, in questo modo $\frac{6}{12}$ ovvero $\frac{4}{12}$. Questa frazione $\frac{6}{12}$ val 6 di quelle parti, de' quali l' intiero *a* ne val 12. Quest' altra frazione $\frac{4}{12}$ val 4 parti tali, quali tutta la grandezza *a* ne val 12.

SE-

SECONDA DEFINIZIONE.

3. *In una frazione i numeri che sono sotto la linea si chiamano* Denominatori *della frazione, perchè facendo conoscere in quante parti è rotto o diviso l'intiero, danno il nome alla frazione.*

In questa frazione $\frac{1}{4}$, il numero 4 ch' è sotto la linea è 'l denominatore di questa frazione, perchè facendo conoscere, che l' intiero di cui $\frac{1}{4}$ è la frazione, è rotto in quattro parti, egli dà il nome alla frazione; sicchè se $\frac{3}{4}$ è la frazione di uno scudo, si dirà che questa frazione val tre quarti di scudo.

TERZA DEFINIZIONE.

4. *In una frazione il numero ch' è sopra la linea, si chiama* numeratore.

In questa frazione $\frac{3}{4}$, il numero 3 ch' è sopra la linea, si chiama il numeratore di questa frazione, perchè egli numera le parti, che questa frazione vale, dell' intiero rotto in 4 parti, p. e. $\frac{3}{4}$ della grandezza *a*: cioè tre quarti di essa grandezza *a*.

QUARTA DEFINIZIONE.

5. *Frazioni di frazioni sono i numeri ch' esprimono le parti della parte di un' intiero.*

Sia *a* uno scudo, sia *b* la metà di questo in-

intiero *a* il numero ch' esprimerà alcune parti di *b*, sarà un numero doppiamente rotto. Queste frazioni di frazioni si esprimono in questo modo. La prima frazione, che vale una metà di *a*, dee essere espressa così $\frac{1}{2}$; e poichè questa metà è ancora rotta in due parti, bisogna rompere il primo numeratore 1 in due parti, lo che farà $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{2}$, cioè una metà di una metà. Quindi, siccome una semplice frazione esprime la ragione di una parte al suo tutto, così una frazione di frazione esprime la ragione di una parte di una parte alla grandezza intiera.

Si potrebbe rompere una terza volta questa seconda frazione dicendo *una metà di una metà di una metà*, $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{2}$, ed allora questa sarebbe una frazione di frazione di frazione; e così all'infinito.

1. ASSIOMA ovvero DIMANDA.

6. *Il Denominatore di una frazione val sempre un' intiero.*

In questa frazione $\frac{3}{4}$, il denominatore 4 vale un'intiero, poichè dimostra in quante parti è diviso l'intiero, ed esprime tutte le sue parti, le quali prese assieme eguagliano il tutto ovvero l'intiero.

2. AS-

2. ASSIOMA ovvero DIMANDA.

Quando il numeratore è eguale al suo denominatore, vale un' intiero; s' è più picciolo, vale meno di un' intiero; s' è più grande, vale più di un' intiero. 7.

In questa frazione $\frac{4}{4}$, il numeratore 4 vale un' intiero, perchè comprende tutte le parti del denominatore.

In quest' altra $\frac{2}{4}$, il numeratore 2 vale meno del suo denominatore 4, perchè vale solamente 2 di quelle parti, delle quali 4 vogliono un' intiero.

In questa $\frac{6}{4}$, il numeratore 6 vale più del suo denominatore, imperciocchè vale 6 di quelle parti, delle quali 4 non vagliono che un' intiero.

3. ASSIOMA ovvero DIMANDA.

Le frazioni sono espressioni della ragione, che ha il tutto alla sua parte. 8.

P. e. $\frac{3}{4}$ di uno scudo. Questa frazione esprime il valore di un numero, che ha ad uno intiero scudo la stessa ragione che quella di questi due numeri 3 e 4.

4. ASSIOMA o DIMANDA.

Chechè si aggiunga o si sottragga dal numeratore, e dal denominatore di una frazione, il va- 9.

lore sarà sempre lo stesso, se resterà dopo questo cangiamento tra 'l numeratore e 'l denominatore la medesima ragione, ch'era per lo innanzi.

Questo assioma è una continuazione del precedente; poichè, una frazione essendo una ragione, il valore sarà il medesimo, se v'è una stessa ragione. Quindi $\frac{2}{4}$ e $\frac{6}{12}$ e $\frac{5}{10}$ vagliono la metà di un'intiero posto in frazione; e ogni volta che il numeratore sarà la metà del denominatore, la frazione valerà sempre la metà dell'intiero. Sei parti di dodici parti non dicono altro che due parti di quattro parti, cinque parti di dieci parti. Tutte queste espressioni significano una medesima cosa, cioè la metà di un medesimo tutto.

C a p. III.

Preparazioni necessarie per far le operazioni dell'Aritmetica sopra le Frazioni o Ragioni.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Problema Primo.

10\. *Idurre un tutto nelle sue parti.* R

Bisogna moltiplicare il tutto per il numero delle parti, nelle quali si vuol ridurlo.

Sie-

Sieno 10 scudi da ridurre in soldi. Ogni scudo vale 240 soldi, moltiplico dunque 10 per 240, e il prodotto di questa moltiplicazione, ch'è 2400, sarà il numero di soldi, che vagliono 10 scudi; lo che è chiaro. Perchè se uno scudo vale 240 soldi, bisogna che 10 scudi vagliano 10 volte 240 soldi, cioè 2400.

Corollario I.

11. *Col mezzo di questa proposizione si dà lo stesso nome a due grandezze differenti; il che fa conoscere più chiaramente il loro rapporto.*

P. e. comparando uno scudo con 40 soldi, se si riduce uno scudo nelle sue parti, cioè in 240 soldi, si scorge più chiaramente la ragione di 240 soldi a 40 soldi, che di uno scudo a 40 soldi.

Corollario II.

Si può ragguagliare le monete, e le misure.

12. Ragguagliare una moneta grande, o una misura grande è lo stesso che esprimere il valore di una moneta o di una misura con un' altra specie di moneta o di misura più conosciuta.

Se si vuol sapere, quanti soldi vagliono 100 luigi d'oro; bisogna moltiplicare 100 luigi per 750 soldi, valore del luigi d'oro, il

il prodotto 75000 sarà il valore di 100 luigi d'oro, che vagliono perciò 75000 soldi.

Si vuol sapere, quanti piedi contengono 100 pertiche. La pratica contenendo 6 piedi, moltiplico 100 per 6, e il prodotto 600 piedi è il valore delle 100 pertiche.

Corollario III.

13. *Si può ridurre un'intiero in una frazione, di cui sia dato il denominatore.*

Se si vuol ridurre questo numero 4 ad una frazione, di cui il denominatore sia 6, bisogna moltiplicare 4 per 6, il che fa 24, e scrivere 6 sotto il 24. Questa frazione $\frac{24}{6}$ valerà 4 intieri, perchè il numeratore 24 contiene quattro volte il denominatore 6, che vale un'intiero.

Per ridurre la grandezza a in una frazione, di cui il denominatore sia d, secondo quello che abbiamo detto, moltiplico a per d, il che fa ad, ch'io pongo sopra una linea, e sotto questa linea colloco d in questo modo $\frac{ad}{d}$. Parimente per ridurre questa grandezza a in una frazione, di cui $a+b$ sia il denominatore, moltiplico a per $a+b$, ed ho il prodotto $aa+ab$, sotto del quale pongo $a+b$ in questo modo $\frac{aa+ab}{a+b}$.

Co-

Corollario IV.

Per ridurre un'intiero in frazione basta scrivere il numero dato sopra una linea, e l'unità di sotto. 14.

P. e. per esprimere in frazione uno scudo, scrivo $\frac{1}{1}$ di scudo; perchè il numeratore essendo eguale al denominatore, per il secondo assioma $\frac{1}{1}$ vale uno scudo. Così per ridurre la grandezza x in frazione, scrivo $\frac{x}{1}$; perchè dividendo x per 1, il quoziente è x; perciò $\frac{x}{1}$ è eguale a x, cioè alla grandezza intiera.

Notate bene, che per segnare con cifre una parte di una grandezza espressa con lettere, ponesi a lato di questa grandezza una fazione con cifre, ch'esprime il valore della parte, che si vuol significare; p. e. per esprimer la quarta parte di aa, scrivo $\frac{1}{4}aa$, ovvero con più brevità $\frac{aa}{4}$.

PROPOSIZIONE II.

Secondo Problema.

Ridurre le parti al loro tutto. 15.

Bisogna dividere il numero delle parti date

te per il numero, ch' esprimere, quante volte il loro intiero le contiene. P. e. per ridurre 2400 soldi in scudi, poichè 240 soldi fanno uno scudo, divido 2400 per 240, e il quoziente 10 mostra, che 2400 soldi vagliono 10 scudi, perchè questo numero di soldi vale 10 volte 240 soldi.

Corollario I.

16. *Col mezzo di questa proposizione si dà uno stesso nome a due grandezze differenti; lo che fa più chiaramente discoprire il loro rapporto.*

Sieno date queste due grandezze 600 piccoli e 100 soldi. Do il medesimo nome a queste due somme, riducendo i piccoli in soldi; lo che fo dividendo 600 per 12, ch' è il numero dei piccoli che fanno un soldo. Il quoziente di questa divisione, ch' è 50, fa conoscere, che 600 piccoli vagliono 50 soldi, ed allora il rapporto di 50 soldi a 100 soldi è più sensibile che quello di 600 piccoli a 100 soldi.

Corollario II.

17. *Si possono ridurre le monete e le misure picciole, a monete e a misure più grandi, e ragguagliarle, cioè vedere ciò che vagliano riguardo alle maggiori.*

Voglio sapere quanti soldi vagliano 600 piccoli; sapendo che 12 piccoli vagliano un sol-

ſoldo, divido 600 per 12, il quoziente di queſta diviſione ſarà 50 ſoldi, valore dei 600 piccoli.

Voglio ſapere quante pertiche fanno 120 piedi; e poichè 6 piedi fanno una pertica, divido 120 per 6, il quoziente 20 dimoſtra, che 120 piedi vagliono 20 pertiche.

Corollario III.

Si può ridurre una frazione in numeri intieri, e conoſcere quant' intieri eſſa vaglia. 18.

Deeſi ſupporre, che queſta frazione vaglia almeno un' intiero. P. e. ſia data queſta frazione $\frac{24}{4}$. Divido 24 numeratore per lo denominatore 4; il quoziente di queſta diviſione 6 farà conoſcere, che $\frac{24}{4}$ vale ſei intieri; imperciocchè 24 dee valere tanti intieri, quante volte 4 è contenuto in 24, giuſto il ſecondo Aſſioma; perciò eſſendo contenuto ſei volte in 24, queſta frazione vale 6 intieri.

PROPOSIZIONE III.

Terzo Problema.

Ridurre ad uno ſteſſo denominatore, ovvero ad un medeſimo conſeguente molte frazioni o ragioni. 19.

Ch' è lo ſteſſo che ridurre due ragioni ad eſpreſſioni, nelle quali vi ſieno il medeſi-

mo

mo conseguente; come s' è di sopra insegnato.

Sieno date queste due frazioni o ragioni $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Si vuol ridurle ad uno stesso denominatore, cioè far che abbiano un medesimo conseguente, e perciò un medesimo nome, senza tutta via cambiare il loro valore.

$$\frac{2}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{8}{20} \quad \frac{15}{}$$

Bisogna moltiplicare il denominatore della prima per lo denominatore della seconda, e il prodotto sarà il denominatore comune ch' io scrivo sotto una linea. Dopo bisogna moltiplicare il numeratore della prima per lo denominatore della seconda. P. e. 2 per 4, il prodotto 8 sarà il numeratore della prima; finalmente il numeratore della seconda per lo denominatore della prima, cioè 3 per 5, il di cui prodotto 15 sarà il numeratore della seconda; imperciocchè il numeratore 2 e il denominatore 5 di questa frazione $\frac{2}{5}$ sono stati moltiplicati per lo medesimo numero 4, il numeratore e 'l denominatore della frazione $\frac{3}{4}$ sono stati pure moltiplicati per il medesimo numero 5. Perciò Lib. III. num. 65. 8. è a 20 come 2 a 5, e 15. a 20 come 3 a 4. Dunque per l'Assioma terzo di sopra sono le medesime frazioni

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \quad e \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Se

Se bisognasse ridurre molte frazioni ad un medesimo denominatore, bisognerebbe ridurre primieramente le due prime ad un medesimo denominatore, dopo ridurle tutte e tre in questo modo.

Sia data una terza frazione $\frac{5}{6}$; essendo state già ridotte le due frazioni $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$ a questa $\frac{8 \quad 15}{20}$, moltiplico 20 per 6, il che fa 120, e farà il denominatore commune delle tre frazioni; dopo moltiplico 8 per 6, ciò che farà 48, che farà il numeratore della prima frazione, e 15 per 6, il che fa 90, e farà il numeratore della seconda frazione; finalmente moltiplico 5 numeratore della terza frazioue per 20 denominatore delle due prime frazioni, il che fa 100 numeratore di questa; e così le tre frazioni sono ridotte a queste $\frac{48 \quad 90 \quad 100}{120}$ che hanno uno stesso conseguente, ovvero un medesimo denominatore, e che sono sempre le stesse che le altre $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, perchè hanno le medesime ragioni.

Sieno date queste due frazioni $\frac{b}{x}$ e $\frac{c}{z}$. Secondo la regola precedente, moltiplicando i denominatori x e z l' uno per l' altro, e il numeratore della prima per il denomioatore della seconda, b per z, e 'l oumeratore della seconda per il denominatore della prima, c per x, faran' elleno ridotte a queste due frazioni o ragioni che hanno lo stesso conseguente $\frac{zb}{zx}$ e $\frac{xc}{xz}$.

Co-

Corollario I.

20. *Col mezzo di questa proposizione si conosce sensibilmente il rapporto di due frazioni differenti.*

Sieoo queste due frazioni $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$, de' quali voglio conoscere l'eccesso dell'una sopra dell' altra. Le riduco alle due frazioni seguenti, che hanno uno stesso denominatore o conseguente, $\frac{8}{20}$ e $\frac{15}{20}$, e sono le medesime. Dopo di che vedo chiaramente, che la prima è più picciola della seconda di sette parti, tali che la grandezza intiera espressa per lo denominatore 20, ne contiene 20.

Ridotte che s'abbiano queste due ragioni $\frac{b}{x}$ e $\frac{c}{z}$ a queste altre $\frac{bz}{xz}$ e $\frac{cx}{xz}$ che hanno un medesimo denominatore o uo medesimo conseguente, si vede più sensibilmente qual'è il loro rapporto.

Corollario II.

21. *Date due ragioni si può conoscere qual' è la più grande, e qual' è la più picciola.*

Per intendere in che consista l' eccesso di una ragione sopra di un' altra, bisogna considerare, che la ragione essendo un modo di essere di una grandezza riguardo l'altra grandezza, alla quale viene paragonata; quel che si dice di una ragione, s'intende

tende particolarmente del primo termine ch' è comparato: perciò quando l'antecedente di una ragione è più grande, riguardo al suo conseguente, di quello che sia l'antecedente di un altra ragione, riguardo al suo conseguente, la prima ragione è più grande della seconda. Per conoscere dunque sensibilmente questo eccesso, bisogna dare ai due antecedenti di queste ragioni lo stesso conseguente, riducendolo al medesimo nome. Così queste due ragioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{9}$ ridotte che sieno alle due Ragioni che hanno un medesimo conseguente $\frac{18 \cdot 28}{63}$, si vede chiaramente, che la prima ragione è più picciola della seconda, poichè 18 è più piccolo riguardo a 63 di quello che sia 28 riguardo allo stesso numero 63.

L E M M A.

Trovar la maggior comune misura, ovvero il maggior comun divisore di due numeri dati. 22.

Chiamasi comune misura, ovvero comun divisore di due numeri un terzo numero, per cui li due primi possono essere divisi esattamente.

Per ritrovare il maggiore comun divisore di due numeri dati, bisogna sottrarre il minore dal maggiore.

Primo Caso.

Se l' eccesso del più grande misura esattamente il più picciolo, egli sarà il comune divisore di tutti due, e 'l maggior comune divisore di questi due numeri.

Sieno dati *b* 25 e *d* 30; togliendo 25 da 30, l' eccesso di *d* sopra *b* è 5; e perchè 5 misura 25, dico ch' egli misurerà anche 30, e ch' è il più grande divisor comune di *d* e di *b*.

Poichè *d* sopravanza *b* di 5, se 5 è cinque volte in 25, bisogna che sia una volta di più in *d*, quindi è che lo misura esattamente; ed è il maggior comun divisore dei due numeri dati; il che io dimostro così.

Supponiamo, che vi sia un' altra quantità *c*, maggiore di 5, e sia il maggior comun divisore dei due numeri dati. Esaminiamo se questa supposizione è possibile. Poichè *d* sopravanza *b*, bisogna che *c* sia più volte in *d* che in *b*; ora questo numero *c* sarà o più grande, o più picciolo, o eguale a 5, ch' è l'eccesso di *d* sopra di *b*. Se sarà più grande, non misurerà esattamente *d* e *b*; se più picciolo o eguale, non sarà dunque il maggior comun divisore di *b* e di *d*, di quel che sia il numero 5: la supposizione è dunque impossibile.

Secondo Caso.

Se l' eccesso del numero più grande sopra il più picciolo, non misura esattamente il

più

più picciolo ; bisogna sottrarre quest' eccesso dal più picciolo, fino a tanto che s' abbia trovato un numero, che misuri il numero minore, lo che meglio comprenderassi con un esempio.

Sieno dati 21 e 27 ; l' eccesso di 27 sopra 21 ch' è *6*, non misura esattamente 21. Sottraggo questo eccesso *6* da 21, e resta 15, che non è misurato dal numero minore *6*. Sottraggo dunque 6 da 15, resta *9*, e da 9 sottraggo ancora un' altra volta *6*, ed il residuo 3 misura esattamente *6*. Dico che 3 è la comune, e la più grande misura dei due numeri proposti 21 e 27. Imperciocchè 1°. per la dimostrazione precedente, 3 è la comune, e la più grande misura di *9* e di *6* : e poichè 15 supera *9* di *6*, bisogna che 3 sia comune misura di *9* e di 15, e la più grande ancora ; perchè se ve ne fosse un' altra ancora maggiore, questa misurerebbe anche *6* differenza di 15 e di 9, e perciò 3 non sarebbe la più grande misura di *9* e di *6*.

Nello stesso modo si dimostrerà, che 3 è la misura comune, e la più grande di 15 e 21, e di 21 e 27.

Avvertimento.

Si sciolge il Secondo Caso con più facilità in questo modo : si divida il numero maggiore per lo minore, e senza curare il

quoto, si divida il minore de' due dati per il residuo della prima divisione. Si proceda dividendo in tal modo, finchè si arrivi ad una divisione, in cui il residuo sia zero; l'ultimo divisore di questa operazione sarà la più grande comune misura di due numeri dati. Per esempio dati sieno 27 e 21 divido 27 per 21, ed ho 6 di residuo; divido 21 per 6 ed ho il residuo 3; divido 6 per 3 e resta zero. Dico, che 3 è la più grande comune misura di 27 e 21.

La dimostrazione è facile perch' è simile a quella di sopra.

Se i numeri dati fossero tre, e si cercasse di loro la maggior comune misura, bisognerebbe operare in questo modo. Sieno i tre numeri 12, 8, 6, si ritrovi la maggiore comune misura di 12 e di 8, e questa sarà, per la regola sopradetta, 4: tra 4 e il terzo numero 6 si cerchi la maggiore comune misura, e colla regola stessa averemo 2, che sarà nello stesso tempo maggiore comune misura dei tre numeri dati.

Imperciocchè 2 misura 6 ed anco 4, il quale misura i due altri numeri 8 e 12, perciò 2 misura anche 8 e 12. Che sia poi la misura maggiore, se lo dimostra per assurdo nello stesso modo, che s' è dimostrato che 3 è la maggiore comune misura di 27 e 21.

Terzo Caso.

23. Se le grandezze sono letterali, o saranno elleno incomplesse, o complesse. Se saranno

no incompleffe, la comune e più grande misura di due grandezze date, faranno le lettere comuni all' una, e all' altra delle due date grandezze. P. e. fieno quefte aac, e acd; ac faranno le lettere comuni a quefte due grandezze, e la comune loro mifura.

Se faranno incompleffe; allora dividerafsi la maggiore per la minore, e quefta per il refiduo, fino che fi giunga ad un refiduo eguale a zero, come abbiamo detto di fopra per fciogliere il fecondo cafo in cifre.

Quefto metodo riefce un po' tediofo, ed alcune volte imbarazzante; ficchè abbiamo penfato darne un'altro più facile e fpedito.

Sieno date le grandezze $ab^2c - ad^2c$ e $abm - adm$ per cercare la maggior loro comune mifura. 1°. Si tolga via la lettera a ch'è comune alle parti dell'una e dell'altra grandezza, dopo di che rimarrà $b^2c - d^2c$ e $bm - dm$; tolgo dalle parti della prima grandezza la lettera c, e da quelle della feconda la lettera m, ed averemo $b^2 - d^2$ e $b - d$. 2°. Dividafi la maggiore per la minore, cioè $b^2 - d^2$ per $b - d$, e poichè la divifore è efatta, farà la maggiore comune mifura cercata $ab - ad$, ch'è il prodotto di $b - d$, ultimo divifore, per a prima lettera tolta via dalle parti delle grandezze date, che gli era comune. Imperciocchè a divide efattamente i tutti delle due grandezze date, $b - d$ divide i refidui delle medefime, dunque $\overline{a} + \overline{b - d}$, cioè $ab - ad$ dividerà parimente i tutti. Ch'ella fia anche la maggiore, chiaramente apparifce.

PROPOSIZIONE IV.

Quarto Problema.

24. *Ridurre una frazione o ragione a' termini minori.*

Bisogna dividere il numeratore e 'l denominatore della Frazione per la loro maggior comune misura.

Sia data questa frazione $\frac{30}{48}$; divido 30 e 48 per 6, ch'è la più grande comune misura di 30 e di 48, i quozienti 5 e 8 daranno la nuova frazione $\frac{5}{8}$; imperciocchè Lib. III. n. 67. 5 è a 8 come 30 a 48; dunque per lo Assioma quarto di sopra le due frazioni $\frac{30}{48}$ e $\frac{5}{8}$ vagliono lo stesso. Ora è certo, che questa frazione è ridotta a' minori termini, perchè avendo diviso 30 e 48 per 6, ch'è la loro più grande comune misura, nessun' altra divisione può dare più piccioli esponenti dei quozienti di questa divisione, poichè i divisori più grandi danno i quozienti più piccioli. Dopo questa riduzione scorgesi più chiaramente il rapporto del numeratore di questa frazione al suo denominatore, ovvero qual'è la loro ragione.

Le frazioni o ragioni che sono espresse con lettere, si riducono facilmente a' termini più semplici; imperciocchè, come si è detto, quando trovansi le medesime lettere nella grandezza da dividere, e nel divisore per

per far la divisione basta togliere le lettere che sono comuni alla grandezza da dividere, e al divisore; per dividere bx per x basta levare x dalla grandezza da dividere bx, e b che resta è il quoziente di questa divisione.

In conseguenza per ridurre a' termini più semplici la ragione di aac ad acd, ovvero la frazione $\frac{aac}{acd}$, tolgo dal numeratore, e dal denominatore le lettere che si trovano nell' uno e nell' altro, lo che da questa frazione $\frac{a}{d}$, che ha lo stesso valore di $\frac{aac}{acd}$, cioè la ragione di a a d è la medesima che quella di aac ad acd; imperciocchè facendo questo troncamento, ho diviso il numeratore aac, e il denominatore acd per un medesimo divisore, cioè per ac, sicchè i quozienti a e d sono nella medesima ragione di aac ed acd (*a*).

B 4 Quan-

(*a*) Questo metodo di ridurre le frazioni a' termini più semplici servirà nel solo caso, che il denominatore, e 'l numeratore della frazione sieno grandezze incomplesse, come nel soprassegnato esempio della frazione $\frac{aac}{acd}$; ma se le grandezze del denominatore e del numeratore saranno complesse, allora converrà cercare di queste due grandezze il maggiore comun divisore per la regola s. n. 23; e dividere con quello divisore ritrovato tanto il denominatore che il numeratore, perchè i quo-

Quando due frazioni hanno un comune denominatore, per ridurle a' termini più semplici, di modo che abbiano sempre un denominatore comune, bisogna avvertire di levare solamente le lettere, che trovansi nello stesso tempo nei due numeratori, e nel denominatore comune. P. e. da queste due frazioni, che hanno un medesimo denominatore $\frac{bdcd}{aaccd}$ e $\frac{a^3c}{aaccd}$ cancello semplicemente un c dalli numeratori, e dominator comune, e resta $\frac{bdd}{aacd}$ e $\frac{a^3}{aacd}$. S'io non avessi voluto far questa riduzione in maniera che le due frazioni avessero sempre il medesimo denominatore, le avrei potute ridurre così $\frac{bd}{aac}$ e $\frac{a^3}{cd}$.

PRO-

i quozienti di questa divisione daranno la frazione ridotta. P. e. sia data questa frazione $\frac{aac + aad}{cd + dd}$ per ridurre a termini minori; si divida il denominatore, e 'l numeratore per $c + d$ suo maggior comun divisore, ed avrassi $\frac{aa}{d}$, frazione ridotta a termini minori; poichè aa è a d, come $aac + aad$ è a $cd + dd$.

PROPOSIZIONE V.

QUINTO PROBLEMA.

Ridurre le Frazioni di frazione ad una sola frazione. 25.

Sia data questa frazione di frazione $\frac{b}{c}$ di $\frac{c}{z}$. Il prodotto dei denominatori c e z ch' è cz farà il denominatore della frazione che si cerca; e'l prodotto dei numeratori b e c, ch' è bc, farà il numeratore di questa frazione, ch' è perciò $\frac{bc}{cz}$ ovvero $\frac{b}{z}$.

Per la definizione delle frazioni di frazione, questa data frazione $\frac{b}{c}$ di $\frac{c}{z}$ esprime la ragione di b parte di c alla grandezza intiera z, di cui c è ancora parte. Ora Lib. IV. n. 14. la ragione di bc a cz è composta della ragione di b a c, e di quella di c a z. Dunque la ragione di bc a cz è eguale a quella di b a z, il che si cercava. Imperciocchè ridurre una frazione di frazione in una sola frazione, egli è esprimere tutto in una volta la ragione della parte della parte alla grandezza intiera.

Sia data questa frazione di frazione $\frac{2}{4}$ di $\frac{5}{8}$, moltiplico 4 denominatore di una per 8 denominatore dell' altra, il che fa 32, e 2 numera-

meratore di una per 5 numeratore dell'altra, il che fa 10, la frazione $\frac{10}{12}$ sarà eguale a $\frac{2}{4}$ di $\frac{5}{3}$.

Se vi fossero delle frazioni di frazione di frazione, per ridurle in una sola frazione, p. e. per ridurre ad una sola frazione, questa frazione di frazione di frazione $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{6}$ di $\frac{7}{8}$, moltiplico il denominatore della prima per quello della seconda, 4 per 6, il che fa 24, dopo moltiplico 24 per lo denominatore 8 dell'ultima, il che fa 192, che sarà il denominatore della frazione che si cerca.

Moltiplico nello stesso modo i numeratori, il primo per il secondo, cioè 3 per 5, il che fa 15, e questo prodotto 15 per il terzo ch'è 7, il che fa 105, che sarà il numeratore della frazione cercata, la qual'è per conseguenza $\frac{105}{192}$.

PROPOSIZIONE VI.

SESTO PROBLEMA.

26. *Ragguagliare una frazione, o ridurla a' termini noti.*

Sia questa frazione $\frac{3}{4}$, che vaglia tre quarti di uno scudo: si vuol ragguagliarla, cioè si cerca, quanti soldi vaglia questa frazione.

Moltiplico il numeratore 3, e'l denominatore 4 per le parti cognite di uno scudo, che sono 248 soldi, i prodotti 744, e

992 sono tra loro come 3 a 4; e dividendo 744 e 992 per 4, denominatore della frazione data, i quozienti 186 e 248 saranno ancora nella medesima ragione che $\frac{3}{4}$. Dunque $\frac{3}{4}$ è eguale a $\frac{186}{248}$ cioè tre quarti di scudo vagliono 186 soldi. (*a*)

La moltiplicazione del denominatore non è utile che per la dimostrazione; onde per risolvere la presente Proposizione basta moltiplicare il numeratore della frazione data per le parti note della grandezza intiera proposta. Nel sopraccennato esempio moltiplico 3 per 248 soldi che sono le parti cognite di uno scudo, e dividere 744, prodotto di questa moltiplicazione, per 4 denominatore della frazione data; il quoziente 186 è ciò che si cercava.

Av-

(*a*) Si può risolvere questa Proposizione con più brevità nella seguente maniera, che darà una dimostrazione più chiara.

Si cerca di ragguagliare questa frazione $\frac{3}{4}$ di uno scudo, ovvero di ridurla ad un' altra che abbia per denominatore 248, è lo stesso che cercare una ragione eguale a quella di 4 a 3, di cui m'è noto l'antecedente 248. Dunque L. III. n. 80.

$4 . 3 :: 248 . x$, e perciò $x = 186$,

conseguente della ragione cercata, e numeratore della nuova frazione $\frac{186}{248}$ eguale a $\frac{3}{4}$.

AVVERTIMENTO.

Il prodotto del numeratore moltiplicato per le parti note di un'intiero, essendo diviso per lo denominatore della frazione, se la divisione non è esatta, e che resti una frazione, bisogna ancora ragguagliare questo residuo, e continuare questi ragguagli, fin tanto che resti zero o parti sì picciole, che il loro valore non sia considerabile.

Un'esempio renderà questo avvertimento più chiaro.

Sia data questa frazione $\frac{3}{7}$ di uno scudo: secondo quello ch'è stato insegnato, moltiplico il numeratore 3 per le parti cognite di uno scudo, che sono 248 soldi, il prodotto di questa moltiplicazione è 744, che divido per lo denominatore 7, ed ho per quoziente 106 più $\frac{2}{7}$; perciò $\frac{3}{7}$ di scudo vagliono 106 soldi più $\frac{2}{7}$ di soldo. Ora per sapere quanto vaglia questa frazione $\frac{2}{7}$ di soldo, moltiplico il numeratore 2 per le ultime parti cognite di un soldo, che sono 12 piccoli, il prodotto è 24, che diviso per 7, il quoziente è 3 più $\frac{3}{7}$; sicchè $\frac{2}{7}$ di un soldo vagliono 3 piccoli più $\frac{3}{7}$ di un piccolo, il valore della qual ultima frazione non è considerabile.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

Settimo Problema.

Dividere un numero picciolo per un più grande.

Bisogna scrivere il più grande sotto il più picciolo, lo che dà una frazione, ch'esprime il valore del quoziente che si cerca. 27.

Per dividere 2 per 5 scrivo $\frac{2}{5}$. Se questo 2 vuol dir due scudi, che bisogna dividere a 5 uomini; ognuno dovrà avere due quinti di scudo. Imperciocchè se si ha da ridurre questo numero intiero 2 in una frazione, di cui 5 sia il denominatore, bisogna s'. n. 13. moltiplicare 2 per 5, di cui il prodotto 10 sarà il numeratore dalla frazione che si cerca, la quale frazione $\frac{10}{5}$ vale il numero intiero 2. Ora per dividere 10 quinti di scudo a 5 uomini, egli è chiaro, che bisogna dividere 10 per 5, la qual divisione dee avere per quoziente il numero intiero 2; poichè 10 è fatto di 2 moltiplicato per 5. Così scrivendo il numero più grande sotto il più picciolo si fanno brievemente due operazioni; colla prima delle quali si riduce il numero intiero ad una frazione che ha per denominatore il divisore, e colla seconda si divide il numeratore di questa frazione per lo divisore proposto; il che si fa, come abbiamo veduto, in un tratto di penna.

Non

Non abbiamo potuto dare prima di ora la dimostrazione di questa operazione, la quale abbiamo menzionata nel primo Libro, trattando della divisione dei numeri intieri.

SEZIONE SECONDA

Operazioni Aritmetiche, sopra le Frazioni e sopra le Ragioni.

AVVERTIMENTO.

Abbiamo già detto, che quando molte ragioni hanno per conseguente una medesima grandezza, la grandezza di ciaschedun antecedente, ch'è relativa riguardo al suo conseguente, può essere riguardata come assoluta rispetto agli altri antecedenti; imperciocchè egli è chiaro, che molti terzi di una medesima grandezza, p. e. molti terzi di uno scudo sono fra di loro grandezze assolute. Per sommare dunque 2 terzi con 3 terzi, bastano le regole ordinarie; 2 terzi con 3 terzi fanno 5: ma per far conoscere, che questo numero 5 significa 5 terzi della grandezza di cui s'è parlato, bisogna porre di sotto il conseguente 3, ch'è il denominatore di questa frazione o ragione. Sicchè quando le ragioni o frazioni proposte sono state ridotte ad un me-

de-

desimo nome, ovvero ad un medesimo denominatore; avendo allora un medesimo conseguente, le operazioni che sopra di esse si fanno, non hanno più alcuna difficoltà. Siccome Ragione e frazione è una medesima cosa; così mostrando in qual modo si fanno le operazioni aritmetiche sopra le Frazioni, s'insegna come far si debbano sopra le Ragioni.

C A P. I.

Dell'Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, Divisione, ed estrazione di radice delle Frazioni e delle Ragioni.

PROPOSIZIONE VIII.

OTTAVO PROBLEMA.

Unire in una somma molte Frazioni ò Ragioni. 28.

Bisogna primieramente ridurle ad un medesimo denominatore per la terza Proposizione. Sieno $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{4}$, le riduco a queste tre Frazioni o ragioni, che banno un medesimo denominatore o conseguente $\frac{72}{96}\frac{80}{96}\frac{48}{96}$. Sommo i numetatori 72, 80, 48, lo che fa 200, sotto il quale scrivo il denominatore comune 96; e perciò $\frac{200}{96}$ è eguale $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{4}$.

Quan-

Quando bisogna sommare dei numeri interi con numeri rotti, bisogna ridurre gli intieri in una frazione, che abbia il medesimo nome che la frazione data; e per sommare 6 con $\frac{3}{8}$, riduco 6 in una frazione che abbia per denominatore 8, la quale farà $\frac{48}{8}$, e questa sommata con $\frac{3}{8}$ fa $\frac{51}{8}$.

Questa operazione, colle lettere è ancora più facile. Così per sommare queste due frazioni o ragioni $\frac{aa}{c}$ e $\frac{bb}{c}$, scrivo $\frac{aa+bb}{c}$. La ragione di $aa+bb$ a c è eguale alle due ragioni di aa a c e di bb a c unite in una somma.

PROPOSIZIONE IX.

Nono Problema.

29. *Sottrarre una piccola frazione o ragione, da una frazione o ragione più grande.*

Sieno date $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{8}$, per sottrarre $\frac{2}{8}$ da $\frac{4}{6}$; le riduco primieramente a queste due frazioni o ragioni, che hanno un medesimo denominatore o conseguente $\frac{32}{48}$ $\frac{12}{48}$, poi sottraggo il numeratore 12 dal numeratore 32, il residuo sarà $\frac{20}{48}$.

Se s'ha da sottrarre una frazione da un' intiero, o un' intiero da una frazione; bisogna ridurre l'intiero ad una frazione che abbia lo stesso denominatore della frazione data,

data, 5. num. 13. Per sottrarre $\frac{1}{4}$ da 8, reduco questo intiero 8 a questa frazione $\frac{32}{4}$, da cui avendo sottratta la frazione proposta $\frac{1}{4}$ resta $\frac{31}{4}$.

Ovvero in lettere: per sottrare la frazione $\frac{aa}{c}$ della frazione $\frac{bb}{c}$ scrivo $\frac{aa-bb}{c}$,

PROPOSIZIONE X.

DECIMO PROBLEMA.

Moltiplicare una frazione o ragione, per un' altra frazione o ragione. 30.

Sieno date queste due ragioni o frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$; le riduco a queste due frazioni o ragioni che hanno un medesimo denominatore o conseguente $\frac{12}{15}\ \frac{10}{15}$. Moltiplico poi i numeratori l' uno per l' altro, il prodotto 120 sarà il numeratore della frazione $\frac{12}{15}$ moltiplicata per la frazione $\frac{10}{15}$, sotto il quale numeratore 120 si pone il prodotto del denominatore comune 15 moltiplicato per se medesimo, il qual prodotto è 225, sicchè il prodotto delle due frazioni date è $\frac{120}{225}$.

Per abbreviare senza far alcuna riduzione, bisogna prendere per numeratore della frazione che si cerca, il prodotto dei numeratori delle frazioni date, e per denominatori il prodotto dei denominatori. Perciò le frazioni date essendo $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$ il loro

prodotto sarà $\frac{8}{15}$, il che facilmente si può dimostrare. (*a*)

Basta far vedere, che la ragione di $\frac{8}{15}$ è eguale a questa $\frac{120}{225}$, lo che è chiaro; perchè sono elleno composte di ragioni eguali; e la ragione di $\frac{8}{15}$ è composta di queste $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$, siccome quella di $\frac{120}{225}$ è composta delle frazioni $\frac{12}{15}$ e $\frac{10}{15}$ che sono loro eguali; e le ragioni composte sono sempre eguali, quando le componenti lo sono parimente.

Per moltiplicare $\frac{b}{c}$ per $\frac{m}{n}$ bisogna scrivere $\frac{bm}{cn}$.

PROPOSIZIONE XI.

Undecimo Problema.

31. *Dividere una frazione per una frazione.*

In ogni divisione cercasi come il divisore sia contenuto nella grandezza da dividere, ovvero la ragione del divisore alla grandezza da dividere; perchè, come abbiamo veduto, l'esponente della ragione di queste due grandezze è il quoziente della divisione dell' una per l' altra. Onde quando si pro-

(*a*) La dimostrazione è facilissima, se ben si considera, che frazione, e ragione è una cosa stessa; e per moltiplicare due ragioni, altro non si fa che moltiplicare l'antecedente dell' una, coll' antecedente dell' altra, e 'l conseguente col conseguente ec.

propone di dividere una frazione per un' altra, si dimanda qual è la ragione dell' una all' altra.

Se due frazioni o ragioni hanno il medesimo denominatore o 'l medesimo conseguente, chiaro apparisce che sono fra esse, come i loro numeratori. P. e. $\frac{2}{4}$ è a $\frac{3}{4}$ come 2 a 3; in questo caso bisogna solamente situare il numeratore di una sotto il denominatore dell' altra, sicchè $\frac{2}{3}$ è l' esponente di queste due frazioni $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

Se le due frazioni proposte hanno nomi differenti, bisogna moltiplicare in croce, il numeratore dell' una per lo denominatore dell' altra, e 'l numeratore di questa per lo denominatore della prima, poi dividendo il prodotto, fatto dal numeratore della frazione da dividere e dal denominatore dell' altra frazione, per l' altro prodotto, s' averà il quoziente della divisione delle frazioni proposte. Sieno date queste due frazioni $\frac{b}{d}$ e $\frac{f}{g}$ e vogliasi dividere $\frac{b}{d}$ per $\frac{f}{g}$. Moltiplico b per g ed f per d, e divido com' è stato detto, il prodotto di b per g per il prodotto di d per f, ciò che mi dà $\frac{bg}{df}$, esponente della ragione delle due proposte frazioni, lo che dimostro così.

Moltiplicando b per g ed f per d avrò

 que-

questi due prodotti bg e df, sotto i quali avendo posto il prodotto di d per g, le due frazioni proposte saranno ridotte al medesimo nome $\frac{bg}{dg}$ e $\frac{df}{dg}$, delle quali l' esponente è $\frac{bg}{df}$; conforme a quello che abbiamo detto, che quando due frazioni hanno il medesimo nome, sono fra di esse come i loro numeratori. Ora questo è ciò che bisognava dimostrare, cioè che $\frac{bg}{df}$ era l' esponente delle due frazioni $\frac{b}{d}$ e $\frac{f}{g}$.

Secondo questo metodo per dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{6}$, e per trovare l' esponente della ragione di queste due frazioni, moltiplico 5 per 2, lo che fa 10, il qual prodotto pongo sotto una linea, e sopra della medesima il prodotto di 3 per 6, il che mi dà $\frac{18}{10}$, ch' è l' esponente della ragione di $\frac{3}{5}$ a $\frac{2}{6}$.

Quando il numeratore si può dividere per lo numeratore, e 'l denominatore per lo denominatore, la cosa è più facile. Quindi avendo da dividere $\frac{6}{20}$ per $\frac{2}{5}$, i quozienti sono $\frac{3}{4}$, lo che fassi con brevità, e sopra tutto per le grandezze letterali come $\frac{acd}{bg}$ per $\frac{d}{g}$ viene $\frac{ac}{b}$ La ragione di ciò è, che la divisione disfà ciò che la moltiplicazione ha fatto.

Non

Non è neceſſario di avvertire quì, che le operazioni Aritmetiche ſopra le frazioni ſi provano nello ſteſſo modo che quelle fatte ſopra gl'intieri: cioè l'Addizione colla Sottrazione, e reciprocamente la Sottrazione coll'Addizione, come ancora la Moltiplicazione colla Diviſione, e reciprocamente queſta con quella; il ch'è da per sè chiaro abbaſtanza.

PROPOSIZIONE XII.

Duodecimo Problema.

Elevare ad una data potenza una frazione data; ed eſtrarre la radice da una data potenza eſpreſſa coi numeri rotti. 32.

1°. La frazione data ſia $\frac{3}{5}$, la quale ſe ſi vuol elevare al quadrato, biſogna moltiplicarla per ſe ſteſſa per la Definizione VI. Lib. II. num. 7, cioè moltiplicare il numeratore 3 per ſe ſteſſo, e parimente il denominatore 5 per ſe ſteſſo s'. num. 30. e s'averà $\frac{9}{25}$, quadrato della frazione data $\frac{3}{5}$. S'ella ſi vuol elevare al cubo; ſi moltiplichi il quadrato 9 del numeratore per lo ſteſſo numeratore 3, e'l quadrato 25 del denominatore 5 per ſe ſteſſo, ed allora $\frac{27}{125}$ è il cubo di $\frac{3}{5}$ Lib. II. num. 10. ec.

Perciò il quadrato di $\frac{a}{b}$ è $\frac{aa}{bb}$, e $\frac{aaa}{bbb}$ è il ſuo cubo.

2°. L' estrazione delle radici sopra i numeri rotti fannosi parimente come sopra gl' intieri ; p. e. per estrarre la radice quadrata di questa frazione $\frac{9}{27}$, estraggo quella del numeratore 9 ch' è 3, e quella del denominatore 25 ch' è 5, ed ho la frazione $\frac{3}{5}$, radice quadrata di $\frac{9}{25}$. Quindi $\frac{a}{b}$ è la radice quadrata di $\frac{aa}{bb}$. La radice cubica di $\frac{27}{125}$ è $\frac{3}{5}$; perchè quella di 27 è 3, e quella 125 è 5. La radice cubica di $\frac{a^3}{b^3}$ è $\frac{a}{b}$ ec.

C a p. II.

QUESTIONI CURIOSE.

PRoporrò quì alcune questioni o Problemi, ne' quali scorgerassi l'uso delle frazioni, e la pratica di quanto sopra le medesime si ha insegnato. Considerate in questi problemi una cosa dell' ultima importanza, cioè che la loro risoluzione dipende spesso dal solo modo di esprimere i termini. Un numero intiero si rompe in quante parti si vuole ; bisogna perciò scegliere una frazione propria a risolvere la questione nella maniera che voi vedrete.

QUE-

QUESTIONE I.

Il bacino di una fontana ha tre aperture; per la prima esce tutta l'acqua in 3 ore, per 33.
la seconda in 5, e per la terza in 6: si dimanda in quanto tempo tutto il bacino pieno di acqua si voterebbe, se nel medesimo tempo si aprissero tutte le sue aperture.

Secondo che la questione è proposta, tutta l'acqua uscendo per la prima apertura in 3 ore ne uscirà per la medesima apertura $\frac{1}{3}$ in un' ora, e similmente $\frac{1}{5}$ per la seconda, e $\frac{1}{6}$ per la terza, e per tutte e tre assieme ne uscirà $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ nello spazio di un' ora. Sommate assieme tutte queste tre frazioni secondo le regole dell'addizione fanno $\frac{63}{90}$; la quale frazione si riduce a questa $\frac{7}{10}$, com'è stato insegnato s. n. 24. Dopo di che si può ragionare così: se $\frac{7}{10}$ cioè sette decimi di tutta l'acqua escono in un' ora, in quanto tempo usciranno $\frac{10}{10}$ di quest' acqua? cioè tutta l'acqua, secondo ciò ch' è stato detto nel 1. e 2. Assioma s. n. 6. e 7. Conosco, che questi termini $\frac{7}{10}$, 1 ora, e $\frac{10}{10}$ sono i tre primi termini di una proporzione geometrica, di cui il tempo bisognoso per l'uscita di tutta l'acqua fa il quarto termine.

$$\frac{7}{10} \cdot 1 :: \frac{10}{10} \cdot x$$

Moltiplicando il terzo termine di questa proporzione per il secondo, cioè $\frac{10}{10}$ per 1,

il che fa $\frac{10}{10}$ s. n. 30. perchè l' intiero 1 ridotto in frazione s'esprime così $\frac{1}{1}$ s. n. 14. e dividendo questo prodotto per il primo termine $\frac{7}{10}$, il quoziente è $\frac{100}{70}$, il quale ridotto a minimi termini s. n. 24, dà il piccolo quoziente $\frac{10}{7}$, ch' è eguale a $\frac{100}{70}$. Ora la frazione $\frac{10}{7}$ è un' intiero più $\frac{3}{7}$, secondo ciò ch' è stato detto, 2. Assioma s. num. 7. Dunque $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, e perciò $1 + \frac{3}{7}$ farà il quarto termine della proporzione $\frac{7}{10}$. $1 :: \frac{10}{10}$. $1\frac{3}{7}$. Cioè tutta l'acqua uscirà per queste tre aperture in un' ora, più tre settime parti di ora.

Se si vuol avere questo tempo con più precisione, bisogna raguagliare la frazione $\frac{3}{7}$ a parti note, p. e. a minuti ec. come si ha insegnato s. num. 26.

Questione II.

34. *La metà di una picca e un terzo sono nell' acqua, e due piedi di questa picca sono fuori dell' acqua; qual è la lunghezza di questa picca?*

Chiamo x la lungezza di questa picca. Perciò $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = x$. Riduco secondo la regola s. n. 19. queste due frazioni ad uno stesso nome, cioè a queste $\frac{3x}{6}$ e $\frac{2x}{6}$, che unisco l'una coll' altra s. n. 28. ciò che fa $\frac{5x}{6}$, perciò $\frac{5x}{6} + 2 = x$. Ora $\frac{5x}{6} + \frac{x}{6} = x$; perchè il denominatore 6 è il valore di tutto x; dunque $\frac{x}{6} = 2$; e la grandezza intiera x è un

un numero, di cui 2 è la festa parte, per ciò è il prodotto di 2 moltiplicato per 6 cioè 12; questa picca è dunque 12 piedi.

QUESTIONE III.

Achille va dieci volte più presto di una Tartaruga, e la Tartaruga ha un miglio d'avanzo. Si dimanda, quando Achille potrà giungerla. 35.

Achille arriverà questa Tartaruga al primo nono del secondo miglio; imperciocchè mentre la Tartaruga averà fatto $\frac{1}{9}$ del secondo miglio, Achille dee aver fatto $\frac{10}{9}$ cioè dieci volte più strada. Ora $\frac{10}{9}$ vagliono un miglio più un nono di miglio.

Gli spazj, per i quali passa la Tartaruga, fanno questa progressione Geometrica $\div\!\div$ 1. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$ ec. la quale va sempre diminuendo; e, come s'è detto L. III. num. 95. tutte queste decime di decime all' infinito non fanno che una nona parte di miglio.

QUESTIONE IV.

Un' Orologio ha due raggi, uno delle ore che fa il suo giro in 12 ore, e l' altro de' minuti che fa lo stesso giro in un' ora, dimandasi, che sieno notati tutti li punti, ne' quali questi due raggi s'incontraranno. 36.

Dopo ciaschedun giro il raggio de' minuti

ti ſi trova ſopra le 12 ore. Sicchè dopo il primo giro il raggio delle ore ha l' intervallo di un' ora d' avanzo ſopra quello dei minuti, e queſto giungerà quello dopo l' $\frac{2}{11}$ di due ore; imperciocchè nel tempo che 'l raggio delle ore ha fatto $\frac{1}{11}$ di un' ora, il raggio de' minuti che va 12. volte più preſto, dee aver fatto 12 undecimi $\frac{12}{11}$ cioè l' intervallo di un' ora intiera più $\frac{1}{11}$ di queſto intervallo; dopo il ſecondo giro il raggio delle ore avrà d' avanzo l' intervallo di 2 ore, non può dunque eſſer giunto dall' altro che alla $\frac{2}{11}$ dell' intervallo ch' è tra due e tre ore, imperciocchè allora il raggio de' minuti andando ſempre 12 volte più preſto, avrà fatto $\frac{24}{11}$ che vagliono l' intervallo di due ore più $\frac{2}{11}$. Quindi ſuſſeguentemente queſti raggi s' incontreranno a queſte ore: I + $\frac{1}{11}$. II + $\frac{2}{11}$. III + $\frac{3}{11}$. IV + $\frac{4}{11}$. V + $\frac{5}{11}$. VI + $\frac{6}{11}$. VII + $\frac{7}{11}$. VIII + $\frac{8}{11}$. IX + $\frac{9}{11}$. X + $\frac{10}{11}$. XI + $\frac{11}{11}$ cioè a 12 ore.

Si può far uſo di queſto metodo per determinare le congiunzioni de' Pianeti, quando ſi sa il loro periodo, ovvero il numero degli anni, ne' quali fanno il loro corſo. Si poſſono aſſegnare i punti del Cielo, dove i Pianeti debbono incontrarſi ec.

QUE-

Questione V.

Il Ricco epulone, ardendo di sete, pregò A- 37.
bramo di lasciargli stillare una goccia d'acqua; supposto che questa goccia avesse fatto nel primo minuto 100 leghe, e nel secondo minuto 99, e susseguentemente secondo questa ragione di 100 a 99, ed essendovi stata una distanza infinita tra il Ricco ed Abramo, si dimanda in quanto tempo questa goccia avrebbe potuto arrivare al Ricco epulone.

Il moto di questa goccia discendendo è ritardato; perchè nel primo minuto dovendo fare 100 leghe, e nel secondo non ne facendo che 99, il suo movimento diminuisce secondo quella medesima ragione. Quindi gli spazj, ch'ella scorre, fanno una progressione moltiplice, di cui il primo termine è 100, il secondo 99. Si ritroverà il terzo termine, com'è stato insegnato, moltiplicando il secondo termine 99 per se stesso, e dividendo il prodotto per il primo ch'è 100 sicchè il quoziente $98\frac{1}{100}$ sarà il terzo. Si troveranno in tal modo tutti gli altri termini, che anderanno diminuendo, essendo questa progressione moltiplice; e l'ultimo termine non essendo una grandezza sensibile, si può supporlo eguale a zero.

Perciò $\div\!\!\div$ 100. 99. $98\frac{1}{100}$ - - - - - - - - - - 0.
E cangiando questa progressione moltiplice in una sotromoltiplice

Si ha $\div\!\!\div$ 0 - - - - - - - - $98\frac{1}{100}$. 99. 100.

Sia

Sia dunque *ſ* la ſomma di tutti i termini, che precedono l' ultimo 100. Dunque Lib. Terzo numer. 93. 100 — 99. 99 : : 100 — 0. *ſ*. Ora 100 — 99 è 1, e 100 — 0 è ſempre 100; perciò la proporzione ſi riduce a 1. 99 : : 100. *ſ*, cioè 1 è a 99 come 100 è alla ſomma di tutt' i termini che lo precedono. Per cooſcere queſta ſomma moltiplico (come ſi è detto Lib. III. n. 80.) il terzo termine 100 per il ſecondo 99, e divido il prodotto per il primo termine 1; il quoziente 9900 di queſta diviſione è il quarto termine, valore di *ſ*, in queſto modo 1. 99 : : 100. 9900. Dunque 9900 è la ſomma di tutt' i termini, che precedono l' ultimo 100, il quale aggiunto a 9900, dà 10000, ſomma di tutta la progreſſione.

Dunque concludo, che queſta goccia di acqua facendo nel primo minuto 100 leghe, nel ſecondo 99, così ſuſſeguentemente ſino a zero, non farà in tutta l' eteroità che 10000 leghe, e per conſeguenza non avrebbe poruto mai arrivare al luogo del Ricco epulone; poichè ſi è ſuppoſto, che tra lui e Abramo vi foſſe uno ſpazio infinito.

SE-

SEZIONE TERZA

Delle differenti spezie di numeri rotti.

CAP. I.

Delle Frazioni Decimali.

LE Frazioni possono prendere il loro nome dal modo, con cui la grandezza intiera è divisa. Chiamansi p. e. Frazioni decimali quelle, delle quali l' intiero è diviso in dieci parti, e ciascuna di queste dieci parti in dieci altre, e queste decime di decime in altre decime all' infinito; sicchè i loro denominatori fanno una progressione sottomoltiplice, nella quale regna la ragione suddecupla, come vedete. 38.

$\div\div \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{100000}$ ec.

Uniamo a questa progressione Geometrica la progressione de' numeri naturali, di modo che il primo termine dell' una corrisponda al primo termine dell' altra, e così di seguito.

	A	B	C	D	E	F	G
$\div$	1	2	3	4	5	6	7
$\div\div$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	10.	100.	1000.	1000.	100000.	1000000.	10000000

Moltiplicando p. e. il terzo termine *c* della progressione geometrica per il quarto *d*,

d, il che fa 10000000. Per sapere qual termine nella progressione geometrica è questo prodotto; sommo C e D della progressione Aritmetica, lo che mi dà 7, perciò conosco che il prodotto 10000000 è il settimo termine. Nella progressione Aritmetica si fa coll'addizione quel che nella geometria si fa colla moltiplicazione.

39. Si unisce sempre a questa progressione delle frazioni decimali la progressione Aritmetica; ma in vece delle cifre dei numeri naturali si pongono delle lineerre in questo modo. $10'$. $100''$. $1000'''$. $10000''''$. 100000^{v}. 1000000^{vi}. 10000000^{vii}.

Per il che si dà a loro i nomi del numero di queste picciole lineette, o del valore de' termini della progressione Arirmetica, alla quale queste frazioni corrispondono. Chiamasi dunque *Prime*, *Seconde*, *Terze*, *Quarte*, *Quinte*, *Seste*, *Settime*, e così di seguito all'infinito; e secondo ciò che si ha detto, moltiplicando prime per seconde, $10'$ per $100''$, il che fa 1000, per sapere ciò che sia questo prodotto, unisco le lineerte disopra le une colle altre, ′ con ″ e fa ‴; il che mi fa conoscere, che il prodotro delle prime moltiplicate colle seconde sono terze; che parimenre le terze molriplicate colle quarte fanno settime, perchè 3 e 4 fanno 7. Per la stessa ragione una prima per una prima, $1'$ per $1'$ deè fare $1''$, e $1''$ per $1''$ dee fare $1''''$, ciò ch'è evidente; perchè una

uoa prima è $\frac{1}{10}$: moltiplicando $\frac{1}{10}$ per $\frac{1}{10}$ fa $\frac{1}{100}$, s. n. 30. quindi è, che uoa prima moltiplicata per una prima dee valere una seconda, e $\frac{1}{100}$ è una seconda. Così terze moltiplicate per terze danno seste, e seconde per quarte, ″ per ‴, danno seste ancora.

L' utilità delle frazioni decimali è grandissima; perchè le operazioni che si fanno col loro mezzo sono corte. Per ridurre intieri in prime, prime in seconde, ovvero seconde in prime, prime in intieri, basta moltiplicare o dividere. Per ridurre intieri in prime bisogna moltiplicar per 10; per ridurli in seconde, bisogna moltiplicar per 100, poichè un' intiero vale 10 prime, o 100 seconde. Alcune volte per fare questa riduzione, basta unire le più picciole, alle più grandi; p. e. se si avesse 5 intieri 3′ e 6″, e si volessero ridurre i 5 intieri e le 3 prime in seconde, scrivo 536″; perchè per fare questa riduzione bisogna moltiplicare 5 per 100, cioè far valere il 5 cento volte di più, facendolo passare nel posto delle centinaja; lo che ho fatto ponendo innanzi ad esso due cifre; per ridurre 3′ in seconde, bisogna moltiplicare 3 per 10, o farlo valere dieci volte di più, il che io fo ponendo una cifra innanzi di lui. 40.

Per lo contrario, per ridurre picciole misure a' più grandi, bisogna dividerle per il numero delle loro parti ch' è necessario per fare la grandezza di cui elle sono parti. P. e. per

per ridurre un numero di prime in intieri, dividerlo bisogna per 10, ovvero, il ch'è lo stesso, fare che questo numero vaglia dieci volte meno, e ciò si fà toglendo via una cifra. Per ridurre $53'$ in intieri, separo 3 da 5, allora 5 non valerà più cinque decine, ma cinque unità, che faranno cinque intieri. Così se si propone di sapere, quante seconde fanno $6782'''$, tolgo via una cifra, e scorgo che il numero dato fa $678''$ più $2'''$; se si domanda quante prime è desso, levo due cifre, e vedesi che fa 67 più $82'''$, ovvero $8''$ più $2'''$; se finalmente si dimanda, quant' intieri egli sia, tolgo tre cifre, e vedo, che $6782'''$ fanno 6 intieri più $782'''$, ovvero $7' + 8'' + 2'''$.

41. L'addizione e la sottrazione delle frazioni decimali si fanno nella medesima maniera degl' intieri. Si pongono le frazioni del medesimo nome le une sotto le altre; le prime sotto le prime, le seconde sotte le seconde, le terze sotto le terze ec. e si opera come il solito. Si dia un'occhiata a questi esempj.

Addizione *Sommare* $5'\ 6''\ 3'''$
con $0'\ 7''\ 2'''$
Somma $6'\ 3''\ 5'''$

Sottrazione *Da* $6.\ 4'\ 5''\ 0'''\ 7''''\ 5'''''$
togliere $3.\ 6'\ 0''\ 8'''\ 2''''\ 3'''''$
Resta $2.\ 8'\ 4''\ 2'''\ 5''''\ 2'''''$

Voi

Voi vedere, che si prende ad imprestito dal termine precedente, quando la cifra di sotto è maggiore di quella di sopra.

La moltiplicazione, e la divisione si fanno pure facilmente con queste frazioni decimali; si moltiplicano al solito le cifre, le une per le altre, e si uniscono in una somma le loro picciole lineette, come s'è veduto s'. num. 39. P. e. per moltiplicare 5 intieri $6'3''4'''$ per 8 intieri $2'4''6'''$, riduco queste due somme al medesimo nome, scrivendo semplicemente $5634'''$ e $8246'''$. Dopo di che moltiplico $5634'''$ per $8246'''$, il di cui prodotto è 46457964^{vi}, sopra il quale pongo^{vi}, ch' è fatto dell' addizione di $'''$ e di $'''$ ovvero di 3 e di 3. Perciò il prodotto è di seste. 42.

La divisione si fa nello stesso modo. Si divide le cifre del dividendo per le cifre del divisore, e si tolgono le lineette del divisore dal numero di quelle del dividendo, ponendo il residuo sopra il quoziente. (*a*)

Quindi è, che le ottave divise per le quinte danno terze; imperciocchè da VIII. levando V resta $'''$ ovvero 3. Se si vuol dunque dividere $8'6''4'''$ per $2'$, divido $864'''$ per $2'$, il quo-

(*a*) Da ciò si deduce, che le parti decimali del dividendo deono essere più picciole, o eguali a quelle del divisore, acciocchè possa farsi la sottrazione delle lineette. E se non vi fosse questa piccolezza, o eguaglianza nel dividendo, bisogna procurarla aggiungendovi de' zeri, come s'è veduto s'. num. 40.

quoziente è 432″, sopra il quale pongo ″, perchè levando ′ da ‴, il residuo è ″. Per dividere 3 intieri 4′4″3‴5⁗2′′′′′ per 9′6″, bisogna dividere 344352′′′′′ per 96″, il quoziente sarà 3587‴, sopra il quale pongo tre lineette; perchè da ′′′′′ levando ″ resta ‴.

43. Le divisioni e suddivisioni decimali sono comode, come vedete, perchè le operazioni dell' Aritmerica sono facili, sicchè bisogna per quanto si può, ridurvi le alrre suddivisioni. P. e. essendo le pertiche, delle quali si servono i nostri Operaj, da un lato divise in sei parti, o sei piedi, ogni piede in 12 oncie, ed ogni oncia in dodici linee; bisogna dall'altro lato segnare una divisione della pertica intiera in dieci parti, ed ogni decima parte in altre decime all'infinito: e misurando con questa pertica nuovamente divisa non si dee parlare nè di piedi, nè di oncie, nè di linee, ragguagliando al fine del calcolo le parti decimali, lo che è facile. Imperciocchè per sapere quel che vagliano 8′9″ in piedi, in oncie, in linee, si ragiona così: Se 10 prime ovvero 100 seconde vagliono una pertica ovvero sei piedi, quanto valeranno 8′9″ ovvero 89″? lo che trovo colla regola del tre, moltiplicando 89 per 6, e dividendo il prodotto 534 per 100; il quoziente $5\frac{34}{100}$ farà conoscere, che 8′9″ vagliono 5 piedi, e qualche cosa di più.

Ragguaglio questa frazione che vale 34 parti di un piede diviso in 100, dicendo: se 100

dà

dà 12 oncie che vagliono un piede intiero, cioè queste 100 parti; quanto daranno 34 di queste parti? Moltiplico 34 per 12, e divido il prodotto 408 per 100, il quoziente 4 $\frac{8}{100}$ mostrerà, che questa frazione $\frac{34}{100}$ di di un piede val 4 oncie più $\frac{8}{100}$ di onzia, lo che potrassi ragguagliare a linee ec. Se in vece di 8'9" si avesse 8'9"7‴ da ragguagliare a piedi, oncie ec. bisognerebbe ragionare così: se 100 seconde ovvero 1000 terze vagliono una pertica, cioè sei piedi, quanto valeranno 8'9"7‴ ossia 897‴, ed allora dividendo il prodotto dei due termini medj per 1000 si avranno i quoti, che esprimeranno i piedi, oncie ec. come nell'altro esempio. (*a*)

Se si volesse sapere quante prime, e seconde vagliono cinque piedi e tre oncie, se li troverebbero ragionando in questo modo: se sei piedi vagliono una pertica, e per conseguenza 10 prime, ovvero, il ch'è lo stesso, se tre piedi vagliono cinque prime, cinque piedi quante prime valeranno?

(*a*) Colla regola mercantile, detta del cento e del migliajo, si ragguagliano facilmente a piedi, oncie ec. le decimali dei due proposti esempj. La regola del cento è questa.

Si vuol sapere quanto valeranno libbre 7654 di Pepe in ragione di lir. 47. il cento.

Si moltiplicano lib. 7654 per 47

```
   7654
     47
  -----
  53578
 30616
 ------
 3597|38
     |20
     ----
   7|60
    |12
    ----
    120
    60
   ----
   7|20
```

Si taglino due cifre del prodotto, come si vede nell' esempio; poi si moltiplichino i due numeri tagliati per 20 soldi, valore di una lira.

Si taglino ancora due cifre del prodotto 760, e queste due cifre si moltiplichino per 12 piccoli, valore di un soldo. Finalmente si tagli anche l' utimo prodotto nello stesso modo; e vedrassi, che le lir. 7654 Pepe a lir. 47 il cento vagliono lir. 3597 sold. 7 pic. 7.

Dunque nel primo proposto esempio per ragguagliare a piedi, oncie ec. 8'9", ovvero 89", si moltiplichi 89 per sei, e si tagli il prodotto, come s'è fatto di sopra, e si vede qui sotto

```
        89
         6
piedi 5|34
       |12
       ----
        68
        34
oncie  4|08 ec.
```

Perciò 89" vagliono 5 piedi, 4 oncie ec.

La regola del migliajo non diferisce da quella del cento, se non perchè ne' prodotti si tagliano tre numeri in vece di due; sicchè nel secondo propo-

AVVERTIMENTO.

Sogliono i più Moderni segnare le decimali alla maniera Inglese, separando gl' intieri dalle decimali con un punto; in questo modo.

Centinaja	*Decine*	*Unità*		*prime*	*seconde*	*terze*	*ec.*					
6	5	2	.	3	7	9	8	0	4	1	5	....

D 3 Se

sto esempio per ragguagliare a piedi oncie ec. $8'9''7'''$; ecco come si opera.

```
        897
          6
piedi 5|382
       | 12
        764
       382
oncie 4|584
       | 12
       1168
       584
linee 7|008
```

: dunque $897'''$ vagliono piedi 5, oncie 4, linee 7.

Se si avesse da ragguagliare quarte, quinte ec. bisognerebbe operare nello stesso modo, e tagliare quattro, cinque ec. cifre nei prodotti; così ancora se si ragguagliasse prime, basterebbe tagliare una cifra sola. La ragione di tutto ciò è chiarissima, perchè è lo stesso tagliare una cifra del prodotto, che dividerlo per 10; è lo stesso tagliarne due che dividerlo per 100; è la stessa cosa tagliarne tre che dividerlo per 1000 ec.

ro da moltiplicare e nel moltiplicatore, gli uni e gli altri sommati assieme.

```
ESEMPIO I.      1.234
                 2.13
                -----
                 3702
                1234
               2468
               ------
               262842

II.   4.0942       III.      0.00324
      0.0231               0.0.00032
     -------              ----------
      40942                      648
     122826                     972
   0 081884               -------------
  -----------             0.0000000103 68
  0.0945 7602
```

Nella divisione non v'è altro di particolare, che bisogna porre nel quoziente tanti posti di decimali, quanti il dividendo ve n'ha di più del divisore.

```
Dividendo 2 . 62842   ( Divisore
                      ( 1 - 234
              1604      -------
                        2 - 13
              3702

              0000
```

C A P. II.

Uso delle Decimali per le divisioni, che diconsi imperfette, quando vi rimane qualche residuo; e per l'approssimazione delle radici delle Potenze imperfette, ovvero per l'espressione (presso à poco) in numeri rotti di ciò che non si può esprimere in numeri intieri.

44. NEl L. I. o. 18. avendo diviso 8678 per 34 si ha avuto per quoziente 255 con 8 di residuo. Ora col calcolo delle decimali si vuol cercare un quoziente più esatto, sicchè il residuo divenga una grandezza minore di qualunque data, e perciò da non computarsi. Per far questo, conviene prima porre un punto al quoziente dopo gl'intieri per distinguere questi dalle parti decimali che si scopriranno; poi si aggiunga un zero al residuo 8, e si divida 80 per 34 secondo le regole sopraccennate, e come si vede nell'esempio seguente.

Dividendo 8678 (*Div.* 34
Quot. 255. 235 ec.

187

178

80 Residuo che si continua a dividere

120

180

10 ec.

Si

Si può unire a questo residuo 10 degli altri zeri, e così procedere all'infinito, che finalmente si arriverà al residuo minore di qualunque dato ec.

L'approssimazioni delle radici delle potenze imperfette si fa presso poco nello stesso modo. Deesi notare, come proverò nel Libro seguente, che non si può esprimere con alcun numero sia intiero, sia rotto, la radice di una Potenza imperfetta; che p. e. questo numero 18, che non è numero quadrato, non può avere una radice, che possa esprimersi con qualunque numero, nè intiero, nè rotto. Ora quel che non si può fare esattamente, si può fare per approssimazione, cioè rompendo l'intiero, e riducendolo in frazioni. P. e. se sia proposto questo numero 18 per estraerne la radice, che sia presso a poco come quella di 18 ch'è un numero di piedi; bisogna ridurre questi piedi in oncie. Ogni piede val in lunghezza 12 oncie, ma un piede quadrato val 144 oncie, bisogna dunque moltiplicare 18 per 144, il prodotto è 2592, il quale un quadrato di 18 piedi è eguale. Poi bisogna prendere la radice quadrato di questo prodotto; ma non se ne ritroverà esattamente alcuna; per accostarvisi più da vicino bisogna ridurre l'intiero 18 in frazioni decimali, le quali possono essere continuate all' infinito. Finalmente si può trovare una frazione, che moltiplicata per se stessa faccia 45.

questo numero 18, con sì poca differenza, ch'ella non sia considerabile. Aggiungo a 18 due zeri, il che fa 1800 prime quadrate, che vagliono 18 intieri quadrati, (*a*) poi avendo diviso questo numero in classi

4	00	4 . 2
18	82	

e presa la radice del quadrato dell' ultima Classe ch'è 16, di cui la radice è 4, bisogna raddoppiare questa radice trovata, com' è stato insegnato; il doppio di 4 è 8; per il quale divido 20, ed ho 2 per quoziente, che sarà la seconda cifra della radice del numero dato, e ch'io scrivo dopo il divisore 8. Poi avendo moltiplicato 82 per 2, ciò che fa 164, e levato questo prodotto da 200, resta 36.

	36	
2	00	4 . 2
	82	

Quindi so, che 4.2, ovvero 4 intieri più due prime, sono la radice di 18; ma questa radice non è giusta, perchè mancano 36 prime, acciocchè ella faccia 18 intieri.

Per aver dunque una radice più esatta, bi-

(*a*) Questi due zeri sono aggiunti a 18, perchè se si vuol accrescere la radice 4 di un carattere, debbonsi aggiugnere due alla potenza 18; L. 2. n. 36.

bisogna ridurre questo residuo in seconde quadrate, ponendo innanzi al residuo 36 due zeri.

36	00	4 . 24
8	44	

Di poi bisogna raddoppiare le radici trovate 42, lo che fa 84, e dividere 3600 per questo doppio; il quoziente di questa divisione è 4, ch'è il terzo carattere della radice cercata, e che io segno dopo li due primi già ritrovati. Moltiplico 844 per questo ultimo carattere 4, lo che fa 3376, che tolgo da 3600, e resta 224.

2	24	
36	00	4 . 24
8	44	

Perciò questa radice 4 . 24 non è ancora la giusta radice di 18, mancando 224, perch' ella faccia 18; sicchè volendosene ritrovare una più esatta, bisogna continuare l' operazione, senza speranza, come lo faremo vedere nel Libro seguente, che si possa ritrovare una radice precisa del numero non quadrato, ch'è stato proposto, o di ogni altro numero, che non sia quadrato: ma voi vedete, che il mezzo da noi proposto è esatto, poichè si conosce quanto si siamo avvicinati al termine, cui si desidera giugnere.

Il mirabile si è, che puossi aumentare sino all'infinito questo numero 4, ch'è la radice del quadrato 16 che più s'accosta a 18,

18, senza che quest' addizione aumenti la radice 4 di un numero intiero; il che noi dimostreremo così.

9 prime, *9* seconde, *9* terze, e tutti gli altri numeri rotti uno dietro l' altro sommati assieme, quand' anche fossero infiniti, non possono mai fare una unità di un numero intiero. Mentre, affinchè quel che s' aggiunge a *9* seconde, faccia 10 seconde, bisognerebbe che questa addizione valesse 10 terze, perchè una seconda vale 10 terze, quindi *9* terze con *9* seconde non possono fare 10 seconde. Ora perchè le *9* prime con quel che se gli aggiunge facessero 10 prime, e per conseguenza un' intiero; bisognerebbe che quest' addizione valesse 10 seconde, lo che non è vero.

S' è veduto, che 9 terze con 9 seconde non possono valere 10 seconde; perciò $9'$, $9''$, $9'''$, sommate assieme non possono valere 10 prime, nè per conseguenza uno intiero. Questa medesima dimostrazione prova, che 0.*9999* non possono fare un' intiero, e così all' infinito; dall' altro canto poi 0.*9999* vagliono più che *9* semplici prime. Così voi vedete, come si può aumentare queste *9* prime sempre più, senza mai arrivare a 10 prime; lo che sorprende coloro, che non hanno fatta mai riflessione alla divisibilità indefinita di tutto ciò ch' è grande.

Si può nello stesso modo estrarre la radice cubica dei numeri che non sono cubi.

Bi-

Bisogna ridurre il numero dato o in prime o in seconde o in terze, secondo che si vuol avere una radice più precisa. Sia dato questo numero 30 non cubo: il cubo che più s'accosta a 30, è 27, la di cui radice cubica è 3; da 30 sottraendo 27 resta 3. Per avere una radice più precisa di questa, bisogna ridurre il numero dato in prime; un'intiero ch'è cubo vale 1000 prime, perchè un'intiero val dieci prime: ora 10 moltiplicato per 10 fa 100, e 100 moltiplicato per 10 fa 1000; dunque per ridur li 30 intieri dati in prime, bisogna ch'io scriva di seguito tre zeri, così 30000. Conviene poi estrarre la radice cubica di questo numero 30000 colle regole ordinarie. 1°. dividendolo per classi, com'è stato insegnato.

	201	
~~3~~	~~349~~	
30	000	3.1
~~2~~	7	

2°. Bisogna estrarre la radice del cubo dell'ultima classe. Questa radice è 3, di cui il cubo è 27, ch'io tolgo da 30 e resta 3. Secondo le regole, prendo il quadrato di 3 che ho trovato, il qual quadro è 9, e lo triplo, ed ho 27, per cui divido 30; il quoziente è 1, ch'io segno dopo la prima ritrovata cifra 3 della radice. Da 30 tolgo 27, e resta 3; prendo il quadrato di 1 ch'è 1, e lo moltiplico per 9 triplo di 3, ultima cifra della radice. Tolgo il prodotto ch'è 9 da 30, e re-

sta

sta 21; levo da 210 il cubo di 1 ch'è 1, e resta 209. Così conosco, che la radice cubica di 30 è 3.1. Ma questa radice non è precisa, poichè mancano 209, perchè 31 prime moltiplicate cubicamente facciano 30 interi. Per aver dunque una radice più esatta, bisogna ridurre il numero proposto in seconde: e poichè le prime cubiche vagliono 1000 volte più delle seconde che cubiche non sono, bisogna aggiungere tre zeri dopo le prime che restano, cioè dopo 209, così 209000. Poi bisogna estrarre la radice di questo numero, incominciando a dividerlo in classi com'è stato insegnato.

209 | 000
288 | 3 {3.10

Secondo la regola, prendo il quadrato di 31, ch'è 961, e lo triplo, lo che fa 2883, per il qual numero non potendo dividere 2090 scrivo zero dopo le cifre trovate. So così, che la radice cubica di 30 è 310 seconde; ma questa radice non è ancora esatta. Perciò se ne voglio avere una, che s'avvicini ancora più alla vera radice di 30, debbo ridurre queste seconde in terze, e continuare la medesima operazione ec.

CAP.

CAP. III.

Della riduzione delle Misure, e delle Monete.

LE Misure grandi si dividono ordinariamente in più picciole. I numeri che esprimono le misure grandi possono chiamarsi intieri, e numeri rotti quelli che esprimono le picciole. Abbiamo insegnato di sopra i modi di ridurre tutte queste differenti misure, e di dare alle maggiori e alle minori uno stesso nome, quando è necessario far sopra di esse le ordinarie operazioni aritmetiche; ma senza questa riduzione queste operazioni si fanno facilmente, situando le differenti misure sotto differenti colonne, alle quali si dà il nome di queste misure; siccome s'è veduto, che le cifre hanno differenti valori secondo il posto o colonna, in cui sono collocate. I pesi, le monete, sono misure che si suddividono. Le pertiche p. e. si suddividono in piedi, e i piedi in oncie, le oncie in linee. Vi sono monete grandi e picciole. 46.

Basterà per far concepire quello ch'è necessario di sapere intorno alle operazioni sopra queste suddivisioni, vedere, come si può fare un'addizione di differenti spezie di monete. Se si avesse dunque da fare un'addizione di molti Zecchini, lire, soldi, e piccoli, bi-

bisognerebbe porre tutte queste monete in colonne differenti, come si vede nel seguente esempio, e fare quello stesso, che s'è fatto sopra i numeri ordinarj.

Un zecchino val 22. lire, una lira 20. soldi, un un soldo 12. piccoli. Avendo differenti somme, composte di zecchini, di lire, di soldi, di piccoli, per aggiungerle in una sola somma, bisogna scrivere ciascuna moneta sotto quella del medesimo nome, ponendo, come nel dato esempio, i piccoli nel primo posto da dritta a sinistra, i soldi nel secondo, nel terzo le lire, nel quarto i zecchini, in questo modo.

Zecchini	lire	soldi	piccoli
5	6	8	4
7	8	9	10
11	9	17	8
25	8	10	7
49	11	6	5

Comincio quest' addizione dal primo posto, nel quale trovo 29 piccoli, che fanno 2 soldi e 5 piccoli; segno 5 piccoli in questo posto, e riserbo 2 soldi, i quali con quelli, che vi sono nel secondo posto fanno 46 soldi, che vagliono 2 lire più 6 soldi. Segno 6 sotto questo posto, e riserbo 2 lire. Nel terzo posto trovo 31 lira, che colle 2 lire riserbate fanno 33, che vagliono un zecchino più 11 lire; segno dunque 11 lire, e riserbo 1 zecchino che con

48

48 che trovo nell'ultima colonna fanno 49 zecchini; cosicchè la somma di tutte queste somme particolari è 49 zecchini 11 lire 6 soldi e 5 piccoli.

La sottrazione si fa nel medesimo modo; bisogna scrivere le monete dello stesso nome in una medesima colonna, la somma più picciola sotto della più grande; e cominciando dalla prima colonna da dritta a sinistra, bisogna sottrarre il più picciolo dal più grande, e quel che resta situarlo nel posto che gli conviene. Se nelle prime colonne si ritrova che quel ch'è di sotto è maggiore di quel di sopra, bisogna prendere ad imprestito dalla colonna seguente. Così volendo sottrarre 3 zecchini, 6 lire, 18 soldi, 10 piccoli, da 5 zecchini 8 lire 15 soldi e 6 piccoli; dopo di avere scritte queste due somme, come si vede

Zecchini	lire	soldi	piccoli
5	8	15	6
3	6	18	10
2	1	16	8

dico: dieci piccoli da 6 non si possono sottrarre; prendo ad imprestito un soldo della colonna seguente, che con 6 fa 18 piccoli, da'quali sottraggo 10, e resta 8. Da 14 soldi che restano non posso sottrarre 18 soldi; prendo ad imprestito una lira, che con questi 14 soldi fa 34 soldi, da'quali avendo sottratto 18 resta 16 soldi. Da 7

lire sottraendo 6 resta 1; e da 5 zecchini togliendone 3 restano 2; perciò dopo la sottrazione restano 2 zecchini, 1 lira, 16 soldi e 8 piccoli.

Questi due esempj bastano per comprendere, come far si debba l' addizione e la sottrazione delle specie differenti sì di moneta che di misura; come pure sopra le parti che chiamansi aliquote, cioè che trovansi esattamente in una grandezza un certo numero di volte. Vedesi p. e. quello che far si dee, se si tratta di fare un' addizione di terzi, di quarti, di quinti ec. ovvero una sottrazione. Basta farne delle colonne, di cui l' ultima sia quella degl' intieri; e siccome tre terzi fanno un' intiero, l' addizione dunque di tre terzi dee porsi nella colonna degl' intieri. Nel calcolo Astronomico contasi per gradi, minuti seconde ec. un grado ha 60 minuti, un minuto 60 seconde, una seconda 60 terze, e così di seguito. Quando trattasi di fare un' addizione di queste parti, bisogna situarle in colonne, ciascheduna in quella del suo nome, e poi operare come s' è fatto sopra le monete.

Per le altre Operazioni d' Aritmetica, bisogna necessariamente ridurre le differenti specie di misure che si vogliono moltiplicare le une per le altre, come s' è veduto s. num. 26. Questa riduzione si fa colla moltiplicazione: dopo di ciò quando si vuol sapere, quali specie contiene il prodotto di que-

questa moltiplicazione; se sono misure, quante pertiche, piedi, oncie, linee contenga questo prodotto, si divide lo stesso prodotto per i numeri, che dinotano le ragioni, che queste parti hanno fra di loro.

Si danno le seguenti regole per la riduzione delle monete, di cui è facile scoprire il fondamento, facendo le operazioni secondo le regole ordinarie. Per ridurre le lire in soldi, bisogna aggiungere un zero e raddoppiare la somma. Per ridurre 40 lire in soldi, raddoppio questa somma, lo che fa 80, e aggiungo un zero. Quaranta lire vagliono 800. soldi; e per ridurre soldi in lire, bisogna togliere via la prima cifra da dritta a sinistra, e prendere la metà di quel che resta; e quel che è tolto via sono soldi. Per ridurre 857. soldi in lire, tolgo l'ultima cifra 7, e prendo la metà di 85 ovvero di 84, lo che mi fa conoscere che 857 soldi vagliono 42 lire e 17 soldi.

Per ridurre i soldi in piccoli, bisogna moltiplicare i soldi per 4 e per 3, ovvero quadruplicare e triplicare la somma, ovvero moltiplicare i soldi per 12, poichè 12 piccoli fanno un soldo. Perciò per ridurre 42 soldi in piccoli, moltiplico 42 per 4 lo che fa 168, e 168 per 3, ciò che fa 504, ovvero 42 per 12, che viene lo stesso; 504 è 'l numero de' piccoli, che vagliono 42 soldi. Per ridurre i piccoli in soldi, bisogna prendere il terzo, e il quarto. Così il terzo di 504 ch'è

168, e il quarto di questo terzo ch'è 42, è il numero dei soldi, che vagliono 504 piccoli. Lo stesso avviene, se si dividerà 504 piccoli per 12, valore di un soldo, essendo la divisione quell' operazione, che disfà la moltiplicazione, e restituisce la grandezza com' era prima di moltiplicarsi. Facendosi queste riduzioni alla lunga, scorgesi il fondamento di queste regole.

AVVERTIMENTO.

Di sopra s'è detto, che per le altre Operazioni dell' Aritmetica, oltre il sommare e sottrare, bisogna ridurre le differenti specie di misure o di monete colla regola sopraccennata; io però voglio nulla ostante esporre certa regola di moltiplicare specie differenti di numeri, ch' è molto comodissima, e della quale i Mercatanti ne fanno uso. P. e. si vuol sapere, quanto importi Staja 783 q.te 3 q.ri 1 Formento a lire 15 soldi 8 e piccoli 3 il Stajo. 1°. Moltiplico 783 per 15, come si vede, ed ho 11745 lire, che non è l'intiero valore de' Staja 783, perchè vi mancano i soldi 8 e piccoli 3 per Stajo. 2°. per rilevar dunque il valore dei soldi, dividerò 783 per 4, ed averò lir. 195 soldi 15 importare di soldi 5, ch'è la quarta parte di una lira; poi per 10 ed averò lire 78 : 6 importar di soldi 2; finalmente per 20, e il quoto lire 39 : 3 sarà il valore di soli 1.

783	
15	
3915	
783	
11745	
195	15
78	6
39	3
12058	4

3°.

	783 q.te 3 q.ri 2
	15 : 8 . 3
12058 :	4
9 :	15 . 9
7 :	12 . 10
3 :	16 . 5
1 :	18 . 2
12081 :	- 7 . 2

3°. Si separi con un punto la prima cifra da dritta a sinistra, e quelle cifre che rimangono a sinistra del punto si dividano per 8, ed averassi 9 : 15 . 9 per il valore di 3 piccoli; del che ecco la ragione. Staja 783 formento in ragione di soldi uno importano soldi 783, dunque in ragione di piccoli 3 importar dee la quarta parte di 783 soldi; ma per esprimere questo valore in lire, bisognerebbe ridurre i soldi in lire, come s'è insegnato di sopra, tagliando la prima cifra e dividendo per 2 le altre cifre non tagliate. Questa divisione si tralascia di fare, perchè in sua vece si doppia il divisore 4, e si divide per 8. 4°. Per q.te 2 si prende la metà del valor di uno Stajo, per q.te una il 4, e per q.ri 2 la metà del valor di una quarta.

Esprimo tutta questa operazione in una Tavola.

Formento Staja 783 quarte 3 quartieri 2 a lire 15 sold. 8 pic. 3 il Stajo

	3915
	783
Per sold. 5 il 4	195 : 15
Per sold. 2 il 10	78 : - 6
Per sold. 1 il 20	39 : - 3
Per pic. 3 l'8 come s'è detto	9 : 15 . 9
Per q.te 2 la metà d'uno Stajo	7 : 12 . 10
Per q.te 1 il 4 del valore di 1 St.	3 : 16 . 5
Per q.ri 2 la metà di una quarta	1 : 18 . 2
Somma lire	12081 : 7 . 2

ELEMENTI DELLE MATEMATICHE, OVVERO TRATATTO DELLA GRANDEZZA IN GENERALE.

LIBRO SESTO.

Delle Grandezze incommensurabili.

SEZIONE PRIMA.

Cosa sia commensurabilità e incommensurabilità delle grandezze. Dei numeri pari, impari, primi, quadrati, cubi ec.

CAP. I.

Cosa sia Grandezza incommensurabile.

1. NEl Libr. IV. parlando delle Ragioni abbiamo veduto, che si dice essere *sorda* una Ragione, quando non si può esprimerla co' numeri, cioè quando non si può esattamente segnare, quante volte uno de' termini di questa ragione contiene, o è contenuto nell'altra; se v'è p. e. una volta, due

due volte, tre volte ec. Ond' è che i numeri non sono propriamente che ragioni; imperciocchè quando trattasi di numerare molte cose, se ne prende, o se ne concepisce una che sia intieramente nota, e che si stabilisce per l' unità, o per la comune misura com' è stato detto; poscia paragonando con questa comune misura tutte le altre cose che si vogliono numerare, secondo il rapporto che trovansi aver' esse con quella, gli si danno nomi differenti, e si chiamano due, tre, quattro ec. Perciò li numeri altro non sono che rapporti conosciuti; p. e. questo numero 7 è il rapporto che v' ha tra due cose, di cui si sa che l' una essendo replicata sette volte, misura precisamente l'altra.

L'unità dunque è la grandezza, di cui si serviamo per misurare; e dicesi, che molte grandezze sono commensurabili, o che possono essere misurate da una medesima grandezza, quando si può assegnare una certa quantità, che esattamente s'incontra tante volte in ciascheduna; e se ciò non avviene, queste grandezze sono incommensurabili. Le grandezze, che non hanno fra di loro che una ragione sorda, chiamansi dunque incommensurabili, perchè non possono esprimersi con numeri: nè v'è alcuna determinata grandezza, che presa essendo per unità le possa misurare esattamente senza residuo, cioè senza che vi manchi qualche cosa, o che di qualche cosa eccedino.

Per concepire, che vi sono delle Grandezze incommensurabili, consideriamo, che con una pertica, la quale è una misura di sei piedi, non si può misurare esattamente una lunghezza che ha meno o più di sei piedi, ma che non ne ha dodici; perchè allora due volte la pertica farebbe la lunghezza di dodici piedi. Se questa lunghezza ha tanti piedi, e qualche cosa di più o di meno di un piede, la misura di un piede non potrà esattamente misurarla, ancorchè il piede più esattamente la misuri che la pertica; mentre quel che resta da misurare è più picciolo di un piede. Se si prende per misura un' oncia ch' è la duodecima parte di un piede, e che la lunghezza che si vuol misurare abbia tante oncie, ma oltre di queste qualche cosa di più o di meno; voi vedete che nè pur l' oncia sarà misura esatta, e che l' oncia e questa lunghezza non saranno commensurabili. Che se si continua a prendere misure sempre più picciole dell' oncia, p. e. la duodecima parte di un'oncia cioè una linea, e che si proseguisca a diminuire all' infinito, nè si ritrovi misura esatta; allora questa lunghezza è riputata incommensurabile con tutte le grandezze che noi conosciamo. Dico, se questo succede; il che non posso dimostrarlo, come farò in progresso. Ora se così è, egli è evidente che ciò nasce dalla divisibilità della grandezza all' infinito; poichè se finalmente le gran-

grandezze avessero parti indivisibili, queste ultime parti sarebbero misure comuni.

Cap. II.

Preparazioni per conoscere, se le grandezze sono commensurabili o incommensurabili.

L'Estrazione delle radici dalle Potenze imperfette è ciò che fa particolarmente apparire l'incommensurabilità delle grandezze. Chiamasi perfetta una potenza, che può esprimersi con un numero quadrato, con un numero cubo ec. e un numero è quadrato o cubo, quando ha un numero per radice. Quivi si tratta particolarmente di dar regole per conoscere, quando le potenze sono perfette, quando sono numeri quadrati, cubi ec. lo che ci obbliga a parlare di questi numeri, e di dire nuovamente qualche cosa a proposito della natura dei numeri in genere. 2.

L'unità è ciò che può concepirsi come una cosa sola. 3.

Il Numero è una moltitudine composta di unità. 4.

Numero pari è quello, che si può dividere in due numeri eguali. 5.

Tali sono 6 e 10, che hanno per metà, l'uno 3 e l'altro 5.

Numero impari è quello, che non può essere 6.
diviso

diviso in due numeri eguali, e che differisce dell' unità dal numero pari che lo precede o che lo seguita immediatamente.

Questo numero 9 è impari, nè si può dividere in due numeri eguali: la sua differenza con 8 e con 10 che sono numeri pari, è l'unità. Egli è evidente, che sottraendo o aggiungendo l' unità, sì al detto numero impari, che ad ogni altro di tal sorta, esso diventa pari; come per contrario aggiungendo o sottraendo da un numero pari l'unità, diviene impari. Dicesi che un numero pari è *parimente pari*, quando la sua metà è un numero pari; Quindi 12 è parimente pari, perchè 6 sua meta è un numero pari; ma 10 è *imparimente pari*, perchè la sua metà 5 è impari. (*a*)

7. *Numero primo è quello, che non ha altra misura che l' unità.*

Cioè che soltanto dall' unità può essere misurato esattamente, p. e. 2. 3. 5. 7. sono numeri primi.

8. *Sono numeri primi tra loro quelli, che non hanno per loro commune misura se non l' unità.*

Questi numeri 4 e 7 sono primi tra di loro, perchè non v'è che l' unità che possa essere loro comune misura; non lo sono però questi altri 6 e 18, perchè oltre l' unità possono essere misurati da 2 e da 3. S'è detto, che

(*a*) Euclide chiama anche numero *imparimente impari* quello che non può essere diviso che da numeri impari, come 15 divisibile dai numeri impari 3 e 5. ec.

che i più piccioli numeri esprimenti la ragione, sono gli esponenti della medesima ragione; perciò gli esponenti di una ragione sono numeri primi tra loro. (*a*)

S'è già veduto, che i numeri ricevono nomi differenti secondo che si concepiscono fatti dalla moltiplicazione di altri numeri. Generalmente chiamasi *numero piano* quello, ch'è fatto dalla moltiplicazione di due numeri: *solido* quello ch'è fatto dalla moltiplicazione di tre. Dicesi numero *quadrato*, quando è fatto dalla moltiplicazione di un numero per se medesimo, e questo numero è chiamato radice quadrata di quello. Così 16 fatto di 4 moltiplicato per 4, è un numero quadrato, di cui 4 è la radice quadrata. Un numero Cubico è fatto della moltiplicazione di un numero moltiplicato due volte per se stesso, il qual numero si chiama la radice cuba di esso nu-

(*a*) Queste Definizioni sono del settimo Libro di Euclide, e le seguenti ancora.

Numero composto è quello che può essere misurato da uno o più numeri. P. e. 6 è numero composto, perchè può essere misurato da 2 e da 3.

Numeri composti tra loro sono quelli, che hanno uno o più numeri per loro comune misura. P. e. 8 e 12 che sono misurati da 4 e da 2.

Il Numero perfetto è quello ch'è eguale alle sue parti, come $6 = 1 + 2 + 3$. $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Nessuna di queste definizioni si adopra in questo Libro, nè ne' susseguenti; sono poste quì come in proprio suo nicchio, acciocchè l'uso che gli altri Autori fanno di tali voci non imbarazzi il Lettore di questa Operetta.

numero cubico. Il numero 27 fatto di 3 moltiplicato primieramente per se stesso, lo che fa 9, e di questo prodotto per lo stesso numero 3, ciò che fa 27, è un numero cubico, di cui 3 è la radice cuba.

Quando un numero non è nè quadrato nè cubo, e che per conseguenza non si conosce alcun numero, o non ve n' alcuno (come si dimostrerà) che possa essere sua radice; allora per esprimere questa radice si pone innanzi il numero, di cui è radice, questo segno $\sqrt{\ }$, che si chiama segno radicale, perchè serve ad esprimere le radici.

Quando la grandezza, innanzi alla quale si pone il segno $\sqrt{\ }$, è complessa, cioè composta di due o di più grandezze, unite col segno + ovvero —; se si vuol segnare la radice di tutta la grandezza complessa, s'allunga una delle gambe del segno radicale, perchè esso comprenda tutta la grandezza, così $\sqrt{xx+aa}$; ed allora questa radice si chiama *complessa*: a distinzione di quella che non comprendendo altro che un termine come $\sqrt{a}$, $\sqrt{5}$ ec. si dice *incompleſſa*. Se poi una, o più, o tutte le parti della grandezza complessa sono radici imperfette, e perciò espresse col segno radicale, p. e. $\sqrt{ab+\sqrt{cd}}$, $\sqrt{aa+\sqrt[2]{ac}-\sqrt[3]{de}}$, $\sqrt{\sqrt{ac}-cd+\sqrt{df}}$, $\sqrt{\sqrt{ac+de}}$ ec. allora queste tali grandezze chiamansi *Radici universali*.

Tut-

Tutte queste sorta di Radici, sieno incomplesse, sieno complesse, o universali diconsi *Reali*, a distinzione di quelle che *immaginarie* si nominano, de' quali eccovi la chiara e distinta nozione.

$\sqrt{5}$ è una grandezza reale, che sebbene non potiamo esprimerla in numero, può esser' espressa in linea, come a qualunque mediocremente informato degli Elementi di Geometria è noto; ma $\sqrt{-5}$ e una grandezza impossibile e perciò *immaginaria*. Imperciocchè nessuna grandezza, nè positiva, nè negativa, può mai produrre il quadrato -5; e siccome abbiamo veduto nel primo Libro, che più in più e meno in meno dà sempre più

Moltiplicando $\left.\begin{matrix} + \text{ in } + \\ - \text{ in } - \end{matrix}\right\}$ dà $+$ nel prodotto; dunque $\sqrt{-5}$ è una grandezza che veramente e realmente non può esistere, ma che si può fingere o immaginare e perciò immaginaria è detta: come lo è parimente tutte le altre radici pari, quarte, seste, ottave ec. di potenze negative, p. e. $\sqrt[4]{-6}$; $\sqrt[6]{-12}$; $\sqrt[8]{-13}$ ec.

Altre volte si poneva dopo il segno radicale la prima lettera della potenza, di cui questo segno esprimeva la radice. Così $\sqrt{Q}$ s'era una radice quadrata; $\sqrt{C}$ s'era una radice cuba, $\sqrt{QQ}$ s'era una radice di quadrato di quadrato, come pure $\sqrt{QC}$ s'era una radice di un quadrato cubo. Adesso si pone sopra 'l segno

segno radicale l'esponente della potenza di cui esprime la radice: $\sqrt[2]{}$ in luogo di $\sqrt{Q}$ per esprimere una radice quadrata; $\sqrt[3]{}$ in luogo di $\sqrt{C}$ per esprimere una radice cubica, e così delle altre $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[7]{}$ ec. i quali numeri posti sopra il segno radicali chiamansi esponenti delle Radici. Si avverta però, che quando il segno radicale è solo, bisogna intendervi l'esponente 2 della seconda Potenza; e se sopra vi è una lettera *n* bisogna intendervi l'esponente di una qualunque indeterminata potenza.

Si noti di più, che le grandezze unite al segno radicale alcune volte sono solamente *sotto il segno*, come $\sqrt{ab}$, e la grandezza *ab* dicesi sotto il segno; ed alcune volte sono anche *fuori del segno*, come $b\sqrt{ad}$: in cui *b* è fuori del segno.

Avvertimento.

9. Non è fuor di proposito insegnare quì la maniera di esprimere le radici senza servirsi del segno radicale $\sqrt{}$, giacchè di ciò abbiamo disegnato far qualche uso in questo Libro.

S'è veduto nel primo Libro, che in luogo di replicare molte volte una lettera per esprimere a qual grado di potenza ella sia innalzata, per breviatura si può scrivere a canto della lettera nella parte dritta, una cifra, non in linea retta colla lettera, in questo modo

modo a^2, a^3, a^4. Queste cifre o numeri, che sono stati chiamati esponenti delle potenze, hanno le stesse proprietà delle cifre o lineette poste nella stessa maniera a canto delle decimali; sicchè per moltiplicare due potenze di una grandezza, p. e. a^3 per a^5, non fa d'uopo che di unire 3 con 5, il che fa 8, e scrivere a^8 per il vero prodotto di a^3 per a^5; ovvero se si volesse dividere a^5 per a^3, converrebbe sottrarre 3 da 5, e il residuo 2 sarà l'esponente della potenza del quoto ricercato a^2, come è stato insegnato per le lineette delle decimali: e di ciò la ragione è chiarissima, giusto a quanto abbiamo veduto nelle regole della moltiplicazione delle lettere Lib. I.

Moltipl. $a^3 \times a^5 = aaa \times aaaaa = aaaaaaaa = a^8$.

Divis. $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$.

Dunque se data sia questa progressione geometrica

$$\div a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . \frac{1}{a^1} . \frac{1}{a^2} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^4} \text{ ec.}$$

si potrà tramutarla nella seguente

$$\div a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0 . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3} . a^{-4} \text{ ec.}$$

cioè $1 = a^0$, perchè $\frac{a}{a} = 1 = a^{1-1} = a^0$ per la regola degli esponenti: e parimenti $\frac{1}{a^1} = \frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1}$.

Da

Da ciò rilevasi, che l'unità è eguale alla potenza zero di qualunque grandezza, e l'unità divisa per qualunque potenza è eguale alla medesima potenza coll'esponente negativo.

Non è maggior difficoltà innalzare a differenti gradi di potenza, le potenze di una grandezza, poichè per far ciò basta moltiplicare l'esponente della potenza data, per l'esponente di quella, a cui si vuole innalzarla; p. e. per innalzare a^3 alla potenza seconda, moltiplicare 3 per 2, e 6 sarà l'esponente della potenza cercata, cioè a^6; imperciocchè per le regole della moltiplicazione letterale $a^3 \times a^3 = a^6$.

Per lo contrario, se dalle potenze di una grandezza si vuol estraere una data radice, bisogna dividere l'esponente della potenza per l'esponente della radice, che si cerca, p. e. se si cerca la radice seconda di a^6, dividere 6 per 2, e s'averà il quoto 3 per l'esponente della nuova potenza a^3, che sarà nel tempo medesimo radice seconda di a^6; il ch'è per sè chiarissimo. Dunque la radice seconda di a^1 è $a^{\frac{1}{2}}$, la terza è $a^{\frac{1}{3}}$, la quarta $a^{\frac{1}{4}}$, cioè $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$. ec. lo che si cercava. (*a*)

Questa

(*a*) Le Potenze riguardo ai loro Esponenti sono o perfette o imperfette. Le prime sono quelleche hanno per

Questa proprietà degli esponenti delle potenze, che abbiamo spiegata, nasce da una come somiglianza, che passa tra la Progressione Aritmetica e la Geometrica. Imperciocchè date tutte le potenze di una grandezza, p. e. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. ec. queste formano una progressione Geometrica, siccome i loro esponenti costituiscono una vera progressione Aritmetica; ora in questa si ritrovano i termini per addizione o sottrazione, siccome in quella se li ritrovano per moltiplicazione o divisione, come abbiamo veduto ne' Libri III. e IV. Il primo che ciò rilevò, o per dir meglio, che diligentemente considerò, fu Giovanni Nepero Scoto-Britannico, da cui raccolse la non mai abbastanza lodata invenzione dei *Logaritmi*; di che a suo luogo tratteremo.

LEMMA.

Ogni Potenza dev'essere riputata numero quadrato, cubo ec. se la sua radice è eguale ad un numero. 10

Se x radice di x^2, di x^3, di x^4 è eguale ad un numero, x^2 dev'essere eguale ad un numero quadrato; x^3 ad un numero cubo ec. perchè

per esponente un numero intiero, p. e. a^3, le altre sono quelle che hanno per esponente una frazione, come $a^{\frac{2}{4}}$. Diconsi anco positive, se l'esponente è positivo, come a^2, $a^{\frac{3}{5}}$, negative, se l'esponente è negativo, p. e. a^{-3}, $a^{-\frac{2}{3}}$ ec.

chè il numero a cui x è eguale, moltiplicato in modo quadrato sarà eguale a x^2, moltiplicato cubicamente sarà eguale ad x^3 ec.

PROPOSIZIONE I.

Theorema Primo.

11. *Il prodotto di un numero quadrato moltiplicato per un numero non quadrato, non è numero quadrato.*

Sia 18 numero non quadrato moltiplicato per il quadrato di 2 ch'è 4; il prodotto 72 non sarà quadrato.

Imperciocchè se $18=xx$, e $4=aa$; il prodotto di 18 per 4 è 72, siccome quello di xx per aa è $xaxa$, perciò $xaxa=72$, e $xa=\sqrt{72}$. Se 72 fosse numero quadrato, averebbe una radice che si potrebbe esprimere in numero, cioè xa sarebbe eguale ad un numero. Ora conoscendo una delle radici di xa, cioè a eguale a 2, si conoscerebbe anco la seconda cioè x, L. II. n. 30; per conseguenza xx ovvero 18 sarebbe un numero quadrato, il ch'è falso per l'ipotesi. Non può dunque essere numero quadrato il prodotto di un numero quadrato moltiplicato per un numero non quadrato.

Avvertite però, che due numeri non quadrati moltiplicati tra loro, possono produrre un numero quadrato; imperciocchè 3 e 12 non sono quadrati, ma il prodotto 36 della loro moltiplicazione è un numero quadrato.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

SECONDO TEOREMA.

Il prodotto di due numeri quadrati è sempre un numero quadrato, che ha per sua radice il piano, fatto dalle radici di questi due numeri quadrati. 12.

Sieno dati i due numeri quadrati 4 e 16, il di cui prodotto è 64. 1°. Bisogna dimostrare che questo prodotto è un numero quadrato.

Sia $aa=4$, e $bb=16$; aa moltiplicato per bb fa $aabb=64$. La radice quadrata di $aabb$ è ab, eguale a quella di 64. Ora il valore di ab è conosciuto, perchè a è eguale alla radice di 4 ch'è 2, e b è eguale a 4, radice di 16; dunque ab è eguale al prodotto di 2 in 4. Perciò la radice di 64 potendosi esprimere con numeri, bisogna conchiudere per il Lemma precedente, che 64 sia un numero quadrato.

2°. E' manifesto, che la radice ab del quadrato $aabb$ è il prodotto di a e di b, che sono le radici de' quadrati aa e bb; lo che si aveva da dimostrare.

COROLLARIO.

Dunque un numero quadrato moltiplicato per se stesso produce un numero quadrato. 13.

Perchè il prodotto della moltiplicazione è fatto di due numeri quadrati; p. e. 4 per 4 fa 16 ch'è un numero quadrato.

PROPOSIZIONE III.

Terzo Teorema.

14. *Due ragioni di numero a numero essendo eguali, il prodotto degli antecedenti e il prodotto de' conseguenti sono tra loro come due numeri quadrati.*

Sieno $a.\ b :: c.\ d$. La ragione di a a b sia di numero a numero, come ancora quella di c a d; bisogna provare che ac sia a bd come due numeri quadrati; sicchè se $a=12$, $b=24$, $c=8$, $d=16$, bisogna provare, che 12×8 ovvero 96 sia a 24×16 ovvero 384 come due numeri quadrati.

Poichè sono eguali le due date ragioni, hanno li medesimi esponenti; e ridotte a minimi termini sono come questi numeri $1.\ 2 :: 1.\ 2$. Ma gli antecedenti di queste due ragioni sono un medesimo numero, come lo sono pure i due conseguenti delle medesime. Perciò secondo la definizione de' numeri quadrati, il prodotto 1 degli antecedenti, e il prodotto 4 dei conseguenti saranno numeri quadrati. E le ragioni composte di ragioni eguali essendo eguali; dunque ac ovvero 96 è a bd ovvero a 384 come 1 a 4, per conseguenza come due numeri quadrati; il che bisognava dimostrare.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

Quarto Teorema.

Il prodotto di due numeri piani simili, cioè 15.
che abbiano le radici proporzionali, è un numero quadrato.

Sieno questi due numeri piani 8 e 18; le radici del primo sieno 2 e 4, quelle del secondo 3 e 6. Queste quattro radici sono in proporzione, 2. 3 :: 4. 6, dunque per la proposizione precedente i piani 8 è 18 fatti da queste radici sono fra loro come due numeri quadrati, cioè come 4 a 9, quadrati de' termini minori 2 e 3, a' quali possono essere ridotte le due ragioni eguali dei piani proposti. Perciò 8. 18 :: 4. 9; e
alternando 8. 4 :: 18. 9.

Per la medesima ragione il prodotto 144 degli antecedenti 8 e 18, è a 36 prodotto de' conseguenti 4 e 9, come due numeri quadrati; cioè come 4 a 1, che sono i quadrati dei termini minori, a' quali le ragioni di 8 a 4, e di 18 a 9 possono essere ridotte: Così

144. 36 :: 4. 1.

Ma quando i quadrati sono in proporzione, le loro radici sono proporzionali L. IV. n. 29. Dunque $\sqrt{144}$. $\sqrt{36}$ :: $\sqrt{4}$. $\sqrt{1}$. Così la ragione della radice di 36 a quella di 144 è conosciuta, poich' essa è eguale alla ragio-

F 3 ne

ne di 1 a 2, radici di 1 e di 4. Il prodotto 36 fatto dei numeri quadrati 4 e 9, è un numero quadrato s. n. 11. Dunque la radice di 144 avendo una ragione nota ad un numero conosciuto, ch'è la radice quadrata del numero quadrato 36, per il Lemma sopra proposto, questo numero 144, prodotto da 8 e da 18, sarà un numero quadrato; lo che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE V.

Quinto Teorema.

16. *Il prodotto di due numeri cubici è un numero cubico.*

Sieno questi due numeri cubici 8 e 27; la radice cubica di 8 è 2, quella di 27 è 3. Chiamo *aaa* il numero 8 e *bbb* il numero 27. Ma il prodotto di 8 per 27 è 216, eguale per conseguenza alla grandezza *aaabbb*, prodotto di *aaa* per *bbb*; e la radice cubica di questo prodotto è *ab*. Ora poichè *a* è eguale a 2, e *b* eguale a 3; dunque *ab* è eguale a 6. Perciò la radice cubica del prodotto 216, ch'è eguale alla grandezza *aaabbb*, è 6; per conseguenza 216 è un numero cubico; il che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Dunque un numero cubico moltiplicato per se stesso produce un numero cubico. 17.

Imperciocchè il prodotto di questa moltiplicazione è fatto di due numeri cubici. Quindi 8 per 8 fa 64, ch'è un numero cubico.

PROPOSIZIONE VI.

SESTO TEOREMA.

Se tre ragioni di numero a numero sono eguali, il prodotto dei tre antecedenti sarà al prodotto dei tre conseguenti come due numeri cubici. 18.

Sieno $b . c :: f . g :: h . l$. il prodotto degli antecedenti di queste ragioni è *bfh*, e quello dei conseguenti *cgl*; bisogna dimostrare, che *bfh* è a *cgl*, come un numero cubico a un'altro numero cubico.

La ragione di *b a c* abbia per esponente questi due numeri 2, 3; dunque le tre ragioni date essendo eguali, elle avranno per esponenti li stessi numeri 2.3 :: 2.3 :: 2.3. Perciò i tre antecedenti sono tre medesimi numeri, e i tre conseguenti tre medesimi numeri pure; dunque per la definizione dei numeri cubici, il prodotto degli antecedenti ch'è 8, e'l prodotto dei conseguenti ch'è 27,

27, faranno due numeri cubici. La ragione di 8 a 27 è composta delle medesime ragioni, che compongono quella di *bfb* a *egl*: dunque questi due prodotti *bfb* e *egl* saranno tra loro come 8 a 27. Ora questi due numeri sono cubici; dunque *bfb* è a *egl* come un numero cubico ad un numero cubico; il che bisognava provare.

PROPOSIZIONE VII.

Settimo Teorema.

19. *Il prodotto di due numeri solidi simili, cioè di due numeri che hanno le radici proporzionali, è un numero cubo.*

Il che si dimostra nella stessa maniera che s'ha fatto §. n. 15.

Avvertimento.

Da ciò che abbiamo dimostrato riguardo alle seconde e terze potenze, ne segue chiaramente, che il prodotto di due potenze numeriche di un medesimo grado è un numero della medesima potenza; p. e. un numero quadrato di quadrato moltiplicato per un numero quadrato di quadrato produce un numero quadrato di quadrato. Se quattro ragioni di numero a numero sono eguali, il prodotto degli antecedenti è a quello dei conseguenti come due numeri di

qua

quadrato di quadrato; e così delle quinte, delle seste potenze ec.

SEZIONE SECONDA

Regole per conoscere, se le Grandezze proposte sono commensurabili o incommensurabili.

AVVERTIMENTO.

Abbrevio per quanto posso questa Dottrina delle commensurabilità ed incommensurabilità, poichè basta negli Elementi darne i principj generali. Parlo qui soltanto di ciò che può essere comune ad ogni sorta di grandezza; lasciando da parte tutto ciò che appartiene alla Geometria.

DEFINIZIONE PRIMA.

Due Grandezze sono commensurabili, quando la ragione ch'esse hanno fra loro, si può esprimere co' numeri; incommensurabili, se questa ragione è sorda. 20.

DEFINIZIONE II.

Se due Grandezze non sono come numero a numero, ma lo sieno però i loro quadrati o i lo- 21.
ro

ro cubi, allora si dice, che queste grandezze sono incommensurabili tra loro, ma commensurabili in potenza.

Se $xx = 18$, e $aa = 25$, la radice di 18 ovvero di xx ch'è x, è incommensurabile con la radice di aa. Queste radici però, che sono incommensurabili in se medesime, sono commensurabili in potenza, poichè xx. aa :: 18. 25.

DIMANDA.

22. *Se un numero misura una certa grandezza, ogn'altra grandezza che a questa sia incommensurabile, è anche incommensurabile col detto numero.*

Sia 3 commensurabile con 12, e 12 incommensurabile con x; dico, che 3 ed x sono incommensurabili: imperciocchè, se x fosse un certo numero di volte in 12, ovvero 12 in x, egli è evidente, che ancora 3 sarebbe in x in un certo modo che potrebbe co' numeri esser espresso.

PROPOSIZIONE VIII.

OTTAVO TEOREMA.

23. *La ragione duplicata, e triplicata di numero a numero, è ancora una ragione di numero a numero, che ha per suoi esponenti numeri quadrati s'ella è duplicata, o numeri cubi, s'ella è triplicata.*

La

La ragione duplicata è una ragione composta di due ragioni eguali, gli antecedenti delle quali sono stati moltiplicati l'uno per l'altro, e i conseguenti pure; per conseguenza *s.* num. 14. questi due prodotti, che sono i termini della ragione duplicata, sono tra di loro come due numeri quadrati, e la ragione di essi ha per esponenti numeri quadrati.

Una ragione triplicata è composta di tre ragioni eguali; perciò li termini di questa ragione triplicata sono fra di loro come due numeri cubici, *s.* num. 18, e la di loro ragione ha per Esponenti numeri cubici; il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE IX.

Nono Teorema.

24. *Una ragione semplice è sorda se la ragione duplicata o triplicata di questa ragione non ha per suoi esponenti numeri quadrati o cubici.*

Se *xx* non è a *zz* come due numeri quadrati, e *xxx* a *zzz* come due numeri cubici, dico che la ragione di *x* a *z* è una ragione sorda; imperciocchè s'ella è di numero a numero, bisogna per la proposizione precedente che *xx* sia a *zz* ovvero *xxx* a *zzz* come numero a numero, e che la ragione di *xx* a *zz* abbia numeri quadrati per suoi esponenti, e la ragione di *xxx* a *zzz* numeri cubici; il che non essendo per l'Ipotesi, è dunque impossibile che

la

la ragione di x a z sia una ragione di numero a numero.

PROPOSIZIONE X

Decimo Teorema.

25. *Tre grandezze essendo continuamente proporzionali, la ragione della prima alla terza non può essere che di tre sorti.*

1°. *O di numero a numero avendo per suoi esponenti numeri quadrati.*

2°. *O di numero a numero senz'avere per suoi esponenti numeri quadrati.*

3°. *O sorda, e non di numero a numero.*

Primo Caso.

Se la ragione della prima grandezza alla terza è una ragione di numero a numero, che ha per suoi esponenti numeri quadrati, queste tre grandezze sono commensurabili.

Sieno ÷ $b.\ c.\ d.$ tre grandezze è $b.\ d$ :: $4.\ 9.$

Il prodotto dei numeri quadrati 4 e 9 ch'è 36, sarà s°. num. 12, un numero quadrato, la di cui radice si potrà per conseguenza esprimere con questo numero 6. Ora 6 è il prodotto della radice di 4 ch'è 2, moltiplicata per la radice di 9 ch'è 3: dunque Lib. IV. num. 20. Questo numero 6 è un medio proporzionale tra 4 e 9. Dunque, poichè c è medio

medio proporzionale tra *b e d*, bisogna dunque che queste tre grandezze *b. c. d.* sieno commensurabili, poichè la loro ragione si può esprimere co' numeri.

Secondo Caso.

Se la ragione della prima grandezza alla terza è una ragione di numero a numero, che non abbia per suoi esponenti numeri quadrati, la grandezza media è incommensurabile in se stessa, e commensurabile in potenza colla prima e colla terza.

Sieno ∺ $K. l. m.$ tre grandezze. $K. m :: 3. 4.$ La ragione di K a m è duplicata della ragione di K a l, ovvero composta di due ragioni eguali di K a l e di l ad m. Ora 3 e 4, esponenti della duplicata ragione di K ad m, non sono due numeri quadrati; dunque le due ragioni di K ad l e di l ad m, che compongono questa duplicata ragione, non possono essere ragioni di numero a numero, per la nona Proposizione di sopra. Dunque K ed l sono incommensurabili, come pure l ed m. Ma poichè

Lib. IV. n. 33.

$$\left.\begin{matrix} KK & ll \\ ll & mm \end{matrix}\right\} :: K. m :: 3. 4$$

Dunque KK, ll, mm, sono commensurabili, e $K. l. m$, che s' è dimostrato essere incommensurabili in se medesimi, sono commensurabili in potenza, cioè i lo-

ro

ro quadrati ſono commenſurabili ; il che biſognava provare. $KK . ll :: 3 , 4$, e $ll . mm :: 3 . 4$.

Qui ſi sbagliarebbe, ſe ſi prendeſſero per eſponente altri numeri che quelli accennati ſ. L. III. n. 44. cioè i più piccioli, co' quali eſprimer ſi poſſa una ragione. Imperciocchè, ſe ſi prendono queſti tre numeri 3. 6. 12, per gli eſponenti di K, l, m; è vero che $K . l . m :: 3 . 6 . 12$. Perciò $K . l . m$. ſono commenſurabili, ancorchè la ragione di K ad m, ch'è duplicata di quella di K ad l e di quella di l ad m, non ſia come due numeri quadrati; perchè 3 e 12 non lo ſono. Ma se ſi riducono queſti numeri ai minimi, s'avrà 1. 2. 4; ed allora K ſarà ad m come 1 a 4, che ſono due numeri quadrati, contro la ſuppoſizione.

Terzo Caſo.

Se la ragione della prima grandezza alla terza non è di numero a numero, la grandezza media ſarà incommenſurabile tanto in ſe medeſima che in potenza.

Non eſſendo di numero a numero, ella non è per conſeguenza come due numeri quadrati. Sicchè la ragione ſemplice della prima alla ſeconda, di cui quella della prima alla terza è duplicata, ſarà ſorda per la nona Propoſizione di ſopra. Si ſuppone ſempre, che la prima grandezza ſia conoſciuta; per conſeguenza, ſe la ragione ch'ella ha con la ſeconda, è ſorda, biſogna che queſta ſeconda

ſia'

sia inconosciuta, e che non si possa esprimerla in numeri. Si dica lo stesso della terza.

Questa seconda grandezza sarà parimente incommensurabile in potenza, perchè il quadrato della prima è al quadrato della seconda, come la prima alla terza L. IV. num. 32. Dunque se la ragione della prima alla terza non è di numero a numero, la ragione del quadrato della prima al quadrato della seconda non sarà di numero a numero. La prima e la seconda sono dunque incommensurabili in potenza; come pure la seconda e la terza, quindi queste tre grandezze sono incommensurabili in se medesime e in potenza.

PROPOSIZIONE XI.

UNDECIMO TEOREMA.

Quattro grandezze essendo in proporzione continua, e la ragione della prima alla quarta non potendo essere che di tre sorti; ecco ciò che succederà. 26.

Primo Caso.

Se la ragione della prima alla quarta è di numero a numero, e che abbia per suoi esponenti dei numeri cubici, queste quattro grandezze saranno commensurabili.

Sieno ∺ *b. c. d. f.* quattro grandezze, e *b*.

e b. f :: 8. 27. Poichè 8 e 27 sono due numeri cubici, le loro radici sono conosciute; quella di 8 è 2, e quella di 27 è 3. Moltiplicando il quadrato della prima radice, ch' è 4, per la seconda radice 3, il che produce 12; e 9 quadrato della seconda radice, per la prima radice 2, lo che produce 18, questi due prodotti 12 e 18 saranno due medj proporzionali tra 8 e 27 Lib. IV. n. 25. Ora *b. c. d. f* :: 8. 12. 18. 27. Quindi, poichè le ragioni, che queste quattro grandezze hanno tra loro, possono essere espresse con numeri, elle sono commensurabili.

Secondo Caso.

Se la ragione della prima alla quarta è una ragione di numero a numero, che non abbia per suoi esponenti numeri cubici, la prima e la seconda grandezza sono incommensurabili in se medesime, e commensurabili in terza potenza; lo stesso avviene della seconda e della terza, così pure della terza e della quarta.

Sieno ∺ *K. l. m. n.* si suppone che *K. n* :: 3. 4. La ragione di *K* ad *n* essendo triplicata della ragione di *K* ad *l*, ovvero composta di tre ragioni eguali, cioè di *K* ad *l*, di *l* ad *m*, di *m* ad *n*; ciascheduna di queste tre ragioni eguali non potrebbe essere di numero a numero; *s*. n. 24. Poichè la ragione di *K* ad *n* ch' è triplicata di queste ragioni, ha per suoi esponenti i numeri 3 e 4,

i qua-

i quali non ſono numeri cubici; perciò ſono elleno incommenſurabili, *K* con *l*, *l* con *m*, ed *m* con *p*. Ma Lib. IV. n. 33.

KKK . *lll*				*K* . *n*
lll . *mmm*	}	: :	{	ovvero
mmm . *nnn*				3 . 4

Dunque queſti cubi ſono commenſurabili, perchè ſono come 3 a 4; per conſeguenza le quattro grandezze propoſte *K*. *l*. *m*. *n*. ſono commenſurabili in terza potenza, poichè i loro cubi lo ſono parimente.

Terzo Caſo.

Se la ragione della prima alla quarta grandezza non è di numero a numero, la prima e la ſeconda, la ſeconda e la terza, la terza e la quarta, ſono incommenſurabili tanto in ſe ſteſſe che in terza potenza.

1°. Poichè la ragione della prima alla quarta, ch' è triplicata delle ragioni di queſte quattro grandezze, non è come due numeri cubici, nè di numero a numero, ſ. num. 24. le ragioni di queſte quattro grandezze ſono ſorde, e perciò incommenſurabili in ſe medeſime.

2°. Queſte grandezze ſono parimente incommenſurabili in terza potenza; perchè la ragione del cubo della prima al cubo della ſeconda è la medeſima che la ragione della prima grandezza alla quarta, ſuppoſta non eſſere di numero a numero.

PROPOSIZIONE XII.

Duodecimo Teorema.

27. *Se due grandezze quadrate non hanno numeri quadrati per esponenti della loro ragione, le radici sono incommensurabili.*

E similmente se due grandezze cubiche non hanno per esponenti delle loro ragioni numeri cubici, elle sono incommensurabili.

Perchè i quadrati sono in ragione duplicata delle loro radici, e i cubi in ragione triplicata. Ora s. num. 24. se due ragioni o duplicate o triplicate non hanno per esponenti numeri quadrati o numeri cubici, le ragioni componenti sono sorde; Quindi le radici dei quadrati o dei cubi, che non sono tra loro come numero a numero, non hanno tra esse che una ragione sorda; e perciò sono incommensurabili.

PROPOSIZIONE XIII.

Decimoterzo Teorema.

28. *Tra due numeri, che non hanno per esponente della loro ragione numeri quadrati, non si può trovare un numero, che sia medio proporzionale; e tra due numeri, che non hanno per esponente della loro ragione numeri cubici, non si possono ritrovare due numeri, che sieno medj proporzionali.*

Im-

Imperciocchè se ciò fosse possibile, tre grandezze proporzionali sarebbero commensurabili, ancorchè la prima non fosse alla terza, come due numeri quadrati; lo ch'è impossibile per il secondo caso della proposizione decima.

Se fossero possibili quattro grandezze proporzionali commensurabili, benchè la prima non fosse alla quarta come due numeri cubici, falso sarebbe ciò ch'è stato dimostrato nel secondo caso della proposizione undecima.

COROLLARIO I.

Due numeri non sono quadrati, se gli esponenti della loro ragione non sono numeri quadrati. 29.

Sieno *bb*. *cc* :: 1. 2. Questi due numeri 1 e 2 non essendo quadrati, nè pur *bb* e *cc* possono esserlo; imperciocchè per l' ipotesi e per la proposizione precedente tra *bb* e *cc* non si può trovare medio proporzionale; lo che potrebbesi fare, se *bb* e *cc* fossero due numeri quadrati: perchè il prodotto *bbcc* sarebbe un numero quadrato s. num. 12. di cui la radice *bc*, Lib. III. o. 70. sarebbe medio proporzionale tra *bb* e *cc*.

COROLLARIO II.

Così vedesi chiaramente, che non si può ritrovare un numero quadrato, che sia metà, ter- 30.

 za,

za, quinta, ſeſta, ſettima ec. parte di un altro numero quadrato.

Poichè queſti numeri 2. 3. 5. 6. 7. ec. eſponenti di queſte ragioni non ſono numeri quadrati. E ſe *bb* è il terzo di *aa*; dunque *aa*.*bb*: : 1.$\frac{1}{3}$: : 3.1. per conſeguenza *aa* e *bb* non ſono numeri quadrati. Dicaſi lo ſteſſo; ſe *bb* foſſe un quinto, un ſeſto ec. di *aa*.

Corollario III.

31. *Due numeri non ſono cubici, ſe gli eſponenti delle loro ragioni non ſono cubi.*

Sieno *ddd*.*fff* : : 1. 2. Queſti due numeri 1 e 2, che ſono gli eſponenti, non ſono cubici; ſicchè *ddd* e *fff* non lo poſſono eſſere. Perchè per la propoſizione precedente, nella data ſuppoſizione non ſi può ritrovare due medj proporzionali tra *ddd* e *fff*, lo che ſi potrebbe fare Lib. IV. n. 36. ſe *ddd*, e *fff* foſſero due numeri cubici.

Corollario IV.

32. *Dal che ſcorgeſi, che non ſi può ritrovare un numero cubico, che ſia metà, terza, quarta, quinta, ſeſta, ſettima ec. parte di un'altro numero cubico.*

Poichè queſti numeri 2. 3. 4. 5. 6. 7. ec. non ſono numeri cubi; lo che ſi potrebbe dimoſtrare come s'è fatto dei quadrati ſ. n.30.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

Decimoquarto Teorema.

Non si può esprimere con numeri, sieno intieri, sieno rotti, il valore della radice di una potenza imperfetta. 33.

Sia questo numero 18, che non è quadrato. Egli è evidente, che non v'è numero intiero, che moltiplicato per lui medesimo faccia 18. Si potrebbe, come s'è detto, pensare, che vi fosse qualche numero rotto, il quale esprimesse il valore della sua radice, ch'io chiamo x; ma voglio dimostrare, che ciò è impossibile.

Imperciocchè se altrimenti vero fosse, la ragione di x a 18 non sarebbe sorda. Ora, ch'ella vi sia, lo provo così: moltiplico 18 per 1, lo che fa 18, ch'io posso considerare come un numero piano, di cui la radice quadrata è un medio proporzionale tra 1 e 18. Lib. III. n. 70. sicchè $\div$ 1. x. 18. Ma per il secondo Caso della decima proposizione di sopra, la ragione di 1 a 18 non avendo per suoi esponenti numeri quadrati, x è incommensurabile con 1 e con 18. Dunque per la dimanda 5. num. 21. ogni numero commensurabile con 18 o con 1, non lo sarà con x; perciò x non si può esprimere con alcun numero. La sua ragione dunque con 18 è sorda, il che bisognava dimostrare.

Sia dato il numero 24, che non è cubico; chiamo x la sua radice cubica, e prendo il cubo di 1 ch'è 1. ∺ 1. $1x$. $1xx$. 24. Lib. IV. num. 21. Per il secondo Caso dell'undecima proposizione di sopra, la ragione di 1 a $1x$, e $1xx$ a 24, è sorda. Ora $1x$ è la stessa cosa che x; siccome $1xx = xx$. Dunque x essendo incommensurabile con 1 e con 24, grandezze commensurabili, sarà ancora incommensurabile con ogni altro numero, nè si potrà con numeri esprimere.

Lo stesso è di tutte le altre potenze imperfette.

Altra Dimostrazione.

Per avere una dimostrazione sensibile, che non v'ha alcun numero rotto, che possa esprimere il valore di x, supposto radice quadrata di 18, bisogna farsi sovvenire, che per ridurre 18 in frazione, ad oggetto di avere una radice più grande di 4, radice di 16, numero quadrato che più s'accosta a 18, bisogna moltiplicare 18 per il quadrato della frazione, nella quale si vuol ridurre 18. Lib. V. n. 45. Ora questo prodotto non è un numero quadrato s'. n. 10. dunque avendo sottratta la radice quadrata del più prossimo, resterà ancora qualche cosa. Prendasi una più picciola frazione, e s'avrà ancora un numero che non sarà quadrato. E' ben vero, che si ritroverà una radice più

più grande della precedente, ma minore della vera. Quindi, poichè qualunque picciola frazione che si prenda, non sarà mai un quadrato, così vi sarà sempre qualche avvanzo, senza mai poter venire ad una grandezza precisamente eguale ad x.

SEZIONE TERZA

Le Operazioni dell' Aritmetica sopra le Grandezze incommensurabili.

CAP. I.

Si possono fare tutte le operazioni dell' Aritmetica sopra le Grandezze incommensurabili. Preparazioni per far questo.

34. BEnchè non si conosca il valore di una radice sorda, si può tuttavia sopra di essa far tutte le operazioni dell' Aritmetica; sommare una radice con un' altra, sottrarla, moltiplicar o dividere l' una per l' altra. Queste radici, che si chiamano grandezze *irrazionali* ovvero sorde s' incontrano spesso. L'estrazione delle radici tanto di quelle che sono quadrate, quanto di quelle che sono cubiche, è una operazione usitatissima. Siccome adunque vi sono più numeri

non quadrati o non cubici, che quadratio cubici, trovansi sovente radici sorde; quindi è importante di sapere come si può operare sopra queste sorta di grandezze: ma prima di fare tali operazioni, bisogna preparar le radici; e questa preparazione è facile, poich'ella è fondata sopra la seguente dimanda.

DIMANDA.

35. *Una radice non diventa più grande, abbenchè di radice quadrata ch'ella era, si faccia che sia radice cubica, o radice quadrato-quadrata ec. aumentando le dimensioni della grandezza di cui essa è radice.*

P. e. a è radice di tutte queste potenze a^2. a^3. a^4. a^5. e le loro radici non vagliono l'una più che l'altra.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA PRIMO.

36. *Ridurre due o molte radici sorde incomplesse ad un medesimo nome o segno.*

Per ridurre due radici sorde incomplesse al medesimo nome, bisogna innalzare la potenza più picciola al grado della più grande, com'è stato insegnato. Se la prima è $\sqrt{aa}$ e la seconda $\sqrt[3]{b^3}$, aumento aa di una dimensione, ed allora $\sqrt[3]{a^3}$ e $\sqrt[3]{b^3}$

ave-

averanno un medesimo nome, e saranno due radici cubiche : lo che non cambia il loro valore ; imperciocchè per la Dimanda precedente $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^2}$.

Non si può sempre secondo questa regola ridurre al medesimo segno due radici sorde. P. e. sieno date queste due radici $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{40}$; per innalzare la radice $\sqrt{5}$, e di quadrata farla radice cubica, bisognerebbe moltiplicare il quadrato 5 per la sua radice quadrata, il ch'è impossibile, poichè questa radice è sorda. Bisogna dunque innalzar le due radici proposte a potenze più alte, senza che sia bisogno di conoscere il valore della radice quadrata di 5, nè quello della radice cubica di 40.

Nell' Esempio proposto, moltiplicando 5 per se stesso si fa 25, ch'è un quadrato di quadrato, la di cui radice è $\sqrt[4]{25}$, ed è la cosa medesima che $\sqrt{5}$; moltiplicando il quadrato di quadrato 25 per il quadrato 5, s'averà. 125, ch'è un quadrato cubo, la di cui radice è $\sqrt[6]{125}$, eguale a $\sqrt{5}$. Moltiplicando poi il cubo 40 per se medesimo avrassi 1600, ch' è un quadrato cubo la di cui radice è $\sqrt[6]{1600}$, eguale a $\sqrt{40}$. Perciò le radici $\sqrt{5}$, e $\sqrt{40}$, essendo ridotte a queste $\sqrt[6]{125}$ e $\sqrt[6]{1600}$, hanno un medesimo nome. (*a*)

Quan-

(*a*) Facilmente si deduce il metodo di ridurre due o molte radici ad un medesimo nome o segno, da quanto abbiamo detto §. n. 9.

Si

Quando si vuol ridurre ad un medesimo nome una grandezza assoluta ed una radice data, bisogna prendere il quadrato, o'l cubo della grandezza assoluta, secondo che la radice proposta è radice di quadrato ovvero di cubo ec. P. e. se bisogna ridurre 5 e $\sqrt{27}$ al medesimo nome, prendo il quadrato di 5 ch'è 25, innanzi il quale pongo il segno radicale, così $\sqrt{25}$; dopo di che 5 e $\sqrt{27}$ sono ridotti ad un medesimo nome, senza cambiare il loro valore, poichè $\sqrt{25} = 5$.

L E M M A.

37. *Una potenza fatta colla moltiplicazione di due potenze ha per radice il prodotto delle radici di queste due potenze.* (*b*)

Sia *aaxx*, fatta della moltiplicazione di *aa* per *xx*; la radice di questo quadrato è *ax*, prodotto delle radici dei due quadrati *aa* e *ax*. Nello stesso modo sia *aaaxxx*, fatto della moltipli-

Si exprimano le due radici date $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{40}$. con due potenze imperfette, in questo modo $5^{\frac{1}{2}}$ e $40^{\frac{1}{3}}$. Poi bisogna ridurre le due frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ a due altre frazioni di egual denominatore Lib. 5. nu. 19. ed avremo $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$; e poichè $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; dunque $5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5 \times 5 \times 5} = \sqrt[6]{125}$. Parimente $40^{\frac{1}{3}} = 40^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{40 \times 40} = \sqrt[6]{1600}$.

(*b*) E' lo stesso che la seconda Proposizione s. n. 12. espressa qui generalmente.

tiplicazione di aaa per xxx, la radice di questo cubo è ax prodotto delle radici cubiche di aaa e xxx; il che è evidente.

Il segno radicale non si pone se non innanzi le potenze imperfette per segnare le loro radici. Le radici poi di quelle che sono perfette, si esprimono semplicemente senza questo segno. Così in luogo di $\sqrt{aa}$ si scrive solamente a, perchè $\sqrt{aa}=a$.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA SECONDO.

Ridurre le radici sorde incomplesse ad espressioni più semplici, ovvero ai minori termini, co' quali possono essere espresse. 38.

Questa riduzione non si può fare, se non quando le potenze, innanzi alle quali è posto il segno radicale, sono tali, che possono essere divise da una grandezza che sia quadrata, cubica, ec. cioè una potenza dello stesso genere: ovvero quando possono essere divise da un divisore, che dia per quoziente una potenza del genere di quella del segno radicale. P. e. $\sqrt[3]{a^3b}$ ha la grandezza sotto il segno a^3b, che può essere divisa da a^3, potenza dello stesso genere di quella di tutta la grandezza a^3b; e può esser anco diviso per b, ed ha per quoto a^3, potenza del genere di quella di tutta la grandezza a^3b, ovvero di quella del segno radicale. Dunque posso considerare

ſiderare a^2b compoſta di due quadrati, a^2 e b, de' quali eſtraendo la radice avrò $\sqrt{a^2} = a$, e $\sqrt{b} = \sqrt{b}$, e moltiplicando queſte due radici una coll' altra $a \times \sqrt{b}$ ovvero $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$. (*a*) Parimente ſi può ridurre $\sqrt{27}$ ad una eſpreſſione più ſemplice, dividendo 27 per 9, numero quadrato, il quoziente di queſta diviſione è 3, che ſcrivo dopo il ſegno radicale, innanzi al quale pongo 3, radice di 9, così $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$.

Poichè 9 è tre volte in 27, dunque $9 \times 3 = 27$, e conſiderando 9 e 3 come due quadrati, il prodotto delle loro radici, che ſono 3 e $\sqrt{3}$, ſarà la radice di 27, per il Lemma precedente. Così $3 \times \sqrt{3}$ ovvero $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, e $3\sqrt{3}$ è l'eſponente della grandezza incommenſurabile $\sqrt{27}$.

Per ridurre in un medeſimo tempo due grandezze incommenſurabili, biſogna ritrovare (s'è poſſibile) un diviſore comune, tale ch'eſſo ſia una potenza perfetta dello ſteſſo genere delle radici; ovvero che dia per quoziente potenze perfette dello ſteſſo genere.

Sieno date queſte due grandezze incommenſurabili $\sqrt{75}$ e $\sqrt{27}$; per ridurle a termini più piccioli, divido 75 e 27 per 3, ed ho per quozienti 25 e 9, due numeri quadrati, de' quali le radici ſono 5 e 3. Pongo dun-

(*a*) Da ciò ſi rileva, che il Problema può eſſere in queſto modo eſpreſſo *citare fuori del ſegno radicale una grandezza ch'è ſotto il ſegno.*

dunque 5 e 3 innanzi al segno radicale $\sqrt{\ }$, e dopo di esso pongo il divisore 3 in questo modo, $5\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$; e dico che $5\sqrt{3}=\sqrt{75}$, e $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$, come abbiamo dimostrato.

COROLLARIO I.

39. *Si può conoscere qual'è la ragione di due radici sorde.*

Ridotte che s'abbiano queste due radici $\sqrt{75}$ e $\sqrt{27}$ all'espressioni $5\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$, poichè due prodotti, de' quali uno dei moltiplicatori è lo stesso, sono fra di loro come i moltiplicatori disuguali L. IV. n. 18; dunque $5\sqrt{3} . 3\sqrt{3} :: 5 . 3$. Perciò una radice, che non è commensurabile colla potenza di cui ella è radice, può essere commensurabile con un'altra radice sorda. (*a*)

COROLLARIO II.

40. *Data una grandezza fuori del segno, si può ridurla sotto il segno moltiplicandola per se stessa tante volte, quante lo richiede l'esponente della radice.*

P. e. $a\sqrt[3]{b}$, moltiplicando a due volte per se stessa s'averà $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$.

DE-

(*a*) Le grandezze fuori del segno radicale possono chiamarsi esponenti delle radici tra loro, poichè come nel dato esempio, 5 e 3 esprimono la ragione, che v'è tra una radice e l'altra, cioè tra $\sqrt{75}$ e $\sqrt{27}$. Noi però le chiameremo coefficienti delle radici; perchè i veri esponenti delle radici sono le grandezze postevi sopra: P. e. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[n]{a}$ ec. le grandezze 3, 4, n, sono gli esponenti delle radici.

DEFINIZIONE.

41. *Le radici sorde, delle quali si può in questo modo esprimere la ragione, sono chiamate comunicanti, ovvero commensurabili tra di loro.*

PROPOSIZIONE XVII.

Problema Terzo.

42. *Esaminare se due radici sorde incomplesse sono commensurabili o comunicanti fra di loro.*

Eccovi tre risoluzioni.

I. Bisogna ridurre l'una e l'altra incommensurabile alla più semplice espressione, per il Probl. precedente; e se dopo la riduzione si ritrova nell'una e nell'altra incommensurabile la medesima grandezza sotto il segno, allora elle saranno commensurabili tra loro.

Le due radici nell'ultimo Esempio del precedente Problema sono comunicanti, poichè $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, e $\sqrt{25}=3\sqrt{3}$, e vi esiste sotto il segno sì nell'una che nell'altra il numero 3, perciò $5\sqrt{3}.\ 3\sqrt{3}::5.\ 3$; onde hanno tra loro il rapporto di 5 a 3.

II. Qui già si suppone che i veri esponenti dei segni radicali sieno eguali. Bisogna innalzare quella che si vorrà delle due grandezze date che sono sotto i segni radicali, a un grado di potenza minore di un'unità del grado della radice, poi moltiplicare questa po-

potenza per l'altra delle due date grandezze; e se questo prodotto è una potenza perfetta del grado della radice, le due radici saranno comunicanti tra loro. P. e. sieno date $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$; s' innalzi a ovvero b alla potenza $n-1$, ed averassi a^{n-1}; si moltiplichi questa potenza per b, $a^{n-1}b$ sarà il prodotto cercato, ovvero in altro modo ab^{n-1} e se da questi prodotti si può estrarre la radice il di cui esponente sia n, dico che $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ sono commensurabili tra di loro, perchè $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: a . \sqrt[n]{a^{n-1}b}$. ovvero come $\sqrt[n]{ab^{n-1}} \, ab$. Lo dimostro:

Tra le due grandezze a e b si ritrovino tanti medj proporzionali, quante vi sono unità in $n-1$. Per la Tavola del Lib. IV. n. 23. si averà questa progressione

$a . \sqrt[n]{a^{n-1}b} . \sqrt[n]{a^{n-2}b^2} . \sqrt[n]{a^{n-3}b^3} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt[n]{ab^{n-1}} . b .$

perciò $a . b :: a^n . a^{n-1}b$. L. IV. n. 32. 33. 34. dunque $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: a . \sqrt[n]{a^{n-1}b}$. L. IV. n. 29. 30. Ma per la natura della progressione $a . \sqrt[n]{a^{n-1}b} :: \sqrt[n]{ab^{n-1}} . b$. dunque $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: a . \sqrt[n]{a^{n-1}b} :: \sqrt[n]{ab^{n-1}} . b$.

Per conoſcere ſe $\sqrt[3]{375}$ e $\sqrt[3]{24}$ ſono commenſurabili, innalzo 24 alla potenza $3 - 1 = 2$, e moltiplico queſta potenza ch'è 576 per 375; dal prodotto 216000 eſtraggo la terza radice, ed ho 60 per radice eſatta: dal che concludo che $\sqrt[3]{375}$ e $\sqrt[3]{24}$ ſono commenſurabili tra di loro, e che $\sqrt[3]{375} . \sqrt[3]{24} :: 60 . 24 :: 5 . 2$.

Se ſopra il ſegno radicale non v'è alcuna grandezza nè letterale nè numerica, e per conſeguenza le radici ſieno ſeconde; p. e. date ſieno $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$; poichè $2 - 1 = 1$ moltiplico 2 e 8 l'uno per l'altro, e dal prodotto 16 eſtraggo la radice quadrata 4, ſicchè concludo che $\sqrt{2} . \sqrt{8} :: 2 . 4 :: 1 . 2$. Ovvero $\sqrt{8} . \sqrt{2} :: 8 . 4 :: 2 . 1$. ec.

III. Biſogna finalmente ſcrivere le due grandezze che ſono ſotto i ſegni, l'una ſopra l'altra come in una frazione, e ridurre poi queſta frazione a' minimi termini. P. e. date ſieno $\sqrt[n]{a^n b}$ e $\sqrt[n]{bc^n}$; ſi ſcriva $\frac{a^n b}{bc^n}$, e in minimi termini $\frac{a^n}{c^n}$: da queſto ultimo termine potendo eſtrarre la radice n, dico che le due radici date ſono commenſurabili tra loro; perchè $\sqrt[n]{a^n b} . \sqrt[n]{bc^n} :: \sqrt[n]{a^n} . \sqrt[n]{c^n} :: a . c$.

Ovvero in numeri: $\sqrt{32}$ e $\sqrt{18}$ ſono commenſurabili, perchè $\frac{32}{18}$ ridotto a' minimi termini $\frac{16}{9}$, cadaun di queſti ultimi due termini

mini è una feconda potenza perfetta; perciò $\sqrt{32} . \sqrt{18} :: \sqrt{16} . \sqrt{9} :: 4 . 3$. E questi sono i tre modi di fare il richiesto esame.

CAP. II.

Le prime Operazioni dell' Aritmetica sopra le radici sorde incomplesse.

PEr fare l'addizione delle radici sorde incomplesse, non basta unire in una somma le grandezze delle quali esse sono radici; imperciocchè sommando p. e. 16 con 9, lo che fa 25, di cui la radice quadrata 5 non è 7, somma delle radici di 9 e di 16; conviene dunque cercar regole particolari. La prima cosa che deesi fare è ridurre al medesimo nome le proposte radici, se ne hanno di differenti; poi ad espressioni più semplici. 43.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA QUARTO.

Unire in una somma due o molte radici sorde incomplesse. 44.

Ciò si può fare in due modi.

I. Unendo col segno + le radici date; p. e. se date sono $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$, unisco queste due radici col segno + così $\sqrt{a}+\sqrt{b}$: per ag-

 giun-

giungere $\sqrt{45}$ con $\sqrt{30}$, le fcrivo in queſto modo $\sqrt{45}+\sqrt{30}$.

II. Biſogna ridurre le radici propoſte ad un medeſimo nome, e ad eſpreſſioni più ſemplici; e ſe ſono fra di eſſe commenſurabili, biſogna unire in una ſomma i loro coefficienti, e porre poſcia il ſegno radicale colla commune grandezza che ſotto l' uno e l'altro ſegno ſi ritrova.

Sieno date queſte due radici $\sqrt[n]{a^n c}$ e $\sqrt[n]{b^n c}$; le riduco a queſta eſpreſſione $a\sqrt[n]{c}$ e $b\sqrt[n]{c}$, da cui rilevo, che i coefficienti delle radici ſono a e b; i quali uniſco ſecondo queſta regola così $\overline{a+b}\sqrt[n]{c} = a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c}$, com' è evidente.

Ovvero ſe in numeri ſieno date $\sqrt{75}$ e $\sqrt{27}$ le quali dopo averle ridotte alla più ſemplice eſpreſſione $5\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$ mi fanno conoſcere, che i coefficienti ſono 5 e 3, i quali ſommati aſſieme ed uniti a $\sqrt{3}$ mi danno $8\sqrt{3}$, ſomma delle due propoſte radici $5\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$.

Nota: V'è una terza maniera di ſommare le radici ſeconde ſoltanto. P. e. ſi voglia unire in una ſomma $\sqrt{75}$ e $\sqrt{48}$. 1°. uniſco 75 con 48. 2°. moltiplico 75 per 48, il prodotto è 3600, di cui la radice quadrata è 60. Doppio queſta radice 60, il che fa 120, che uniſco a 123; ed ho 243, la di cui radice quadrata, cioè $\sqrt{243}$, è la ſomma di $\sqrt{75}$ unita con $\sqrt{48}$. Lo che è evidentiſſimo.

Im-

Imperciocchè, sia $\sqrt{75} = x$, e $\sqrt{48} = z$; Lib. II. num. 29.

$\overline{x+z}^2 = x^2 + 2xz + zz$, ovvero sostituendo

$\overline{x+z}^2 = 75 + 2\sqrt{75} \times \sqrt{48} + 48$

$\overline{x+z}^2 = 75 + 120 + 48 = 243$, dunque estraendo la radice;

$x+z = \sqrt{243}$. Il che bisogna dimostrare.

Quando però il prodotto dei numeri sotto i segni non è numero quadrato (come lo è quello di 75 e di 48) non si può con questo metodo sommare le radici seconde. Onde se fossero date da unire in una somma $\sqrt{14}$ e $\sqrt{13}$; siccome $14 \times 13 = 182$, e questo numero non è quadrato, così bisognerebbe fare di esse l'unione in questo modo, $\sqrt{14} + \sqrt{13}$.

PROPOSIZIONE XIX.

Problema Quinto.

Sottrarre due radici sorde incomplesse l'una dall'altra.

Il che si può fare in molte maniere;

1°. Cangiando i segni che precedono le radicali, nello stesso modo, come s'è detto nel Lib. I. operando colle grandezze razionali. Per sottrarre $\sqrt{aa-bb}$ da $\sqrt{aa+bb}$, bisogna scrivere $\sqrt{aa+bb} - \sqrt{aa-bb}$. Per togliere $\sqrt{40}$ da $\sqrt{50}$, scrivo $\sqrt{50} - \sqrt{40}$.

2°. Quando le radici date sono commensurabili tra di loro bisogna sottrarre il coefficiente dell' una dal coefficiente dell' altra, e porvi di poi il segno radicale colla grandezza comune ch' è sotto l' uno e l' altro segno.

Sieno date $\sqrt{75}$ e $\sqrt{27}$, le riduco a questa espressione più semplice, $5\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$, poi per sottrarre $3\sqrt{3}$ da $5\sqrt{3}$, scrivo $2\sqrt{3}$, ch'è il residuo ovvero la differenza delle due radici proposte.

Nota: si possono sottrarre in un terzo modo le radici seconde; unindo in una somma le due grandezze che sono sotto il segno radicale, e sottraendo di poi da questa somma due volte la radice quadrata del prodotto di dette due grandezze: la radice quadrata di quel che rimane è la differenza ovvero il residuo che si cerca.

P. e. per sottrarre $\sqrt{48}$ da $\sqrt{75}$; unisco in una somma 75 e 48 ed ho 123, da cui sottraggo 120, cioè due volte 60, ch' è la radice di 3600, prodotto di 75 per 48, e resta 3; di cui la radice cioè $\sqrt{3}$ è il residuo o differenza che si cerca.

Sia $75 = xx$, e $48 = zz$; dunque $\sqrt{75} - \sqrt{48} = x - z$, e $x - z = \sqrt{3}$, il che bisogna dimostrare.

$\overline{x-z} \times \overline{x-z} = \overline{x-z}^2 = x^2 - 2xz + zz$ e sostituendo i numeri

$$\overline{x-z}^2 = 75 - \overline{2 \times 60} + 48$$

ovvero $\overline{x-z}^2 = 123 - 120 = 3$

dunque $x - z = \sqrt{75} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$. Il che si doveva dimostrare.

PROPOSIZIONE XX.

Problema Sesto.

Moltiplicare due radici sorde incomplesse. 46.

I. Se queste due radici sono le medesime, non v' è bisogno che di togliere il segno radicale all' una delle due. P. e. quando si moltiplica $\sqrt{5}$ per $\sqrt{5}$, si cerca un quadrato di cui $\sqrt{5}$ sia la radice; per conseguenza questo quadrato è 5.

II. In generale, bisogna moltiplicare le grandezze sotto i segni l' una per l' altra, e la radice di questo prodotto, sarà il prodotto delle radici; lo che è evidente. Imperciocchè sieno date queste due grandezze xx e zz; il loro prodotto è $xxzz$, di cui la radice quadrata è xz, prodotto di x e di z, che sono le due radici di xx e di zz. Dunque se bisogna moltiplicare $\sqrt{15}$ per $\sqrt{6}$, moltiplico 15 per 6 lo che fa 90, di cui la radice quadrata $\sqrt{90}$ è eguale alla radice di 15 moltiplicata per quella di 6.

Se si dee moltiplicare $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$, il prodotto sarà $\sqrt{abcd}$.

Quando le radici sono ridotte a' minimi termini, si moltiplicano tra loro le grandezze fuori dei segni, e quelle sotto i segni parimente, ponendo tra questi due prodot-

ti il medesimo segno di prima; sicchè $3\sqrt{2}$ per $5\sqrt{3}$ danno per prodotto $15\sqrt{6}$.

Ma quando queste radici sono comunicanti, bisogna moltiplicare le grandezze fuori dei segni l'una per l'altra, poi moltiplicare questo prodotto per la grandezza sotto il segno; p. e. per moltiplicare $5\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, moltiplico i coefficienti 5 e 3 l'uno per l'altro, e il prodotto 15 per 3 ch' è sotto il segno; l'ultimo prodotto 45 è quello che si cercava. Imperciocchè le due radici essendo considerate come ridotte a' minimi termini, e non comunicanti, la loro moltiplicazione averebbe dato per prodotto $15\sqrt{9}$. Ora essendo 9 un numero quadrato, di cui 3 è la radice, questo segno $15\sqrt{9}$ dimostra, che 15 è moltiplicato per 3, lo che fa 45. Dunque il prodotto di $\sqrt{27}$ per $\sqrt{75}$, cioè di $3\sqrt{3}$ per $5\sqrt{3}$ è 45.

Si noti, che se si avesse da moltiplicare una grandezza intiera per una radice, o una radice (il ch' è lo stesso) per una grandezza intiera, si può far ciò in due modi. 1°. riducendo la grandezza intiera sotto il segno radicale di egual esponente a quello della radice data, p. e. date sieno da moltiplicare a e $\sqrt[3]{c}$, riduco a sotto il segno $\sqrt[3]{}$, ed ho $a=\sqrt[3]{a^3}$, poi moltiplico $\sqrt[3]{a^3}$ per $\sqrt[3]{c}$, com' è stato qui sopra insegnato, sicchè ritrovo $a \times \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a^3c}$. 2°. Ma con più brevità si può fare questa operazione unindo la

gran-

grandezza intiera al radicale in questo modo, $a\sqrt{c}$; il ch'è chiaro per sè. Se si vuol moltiplicare 5 per $\sqrt{13}$, si scriverà dunque $5\sqrt{13}$ per il vero prodotto di questa moltiplicazione.

COROLLARIO.

Si può conoscere il prodotto di due radici sorde, quando le grandezze, di cui esse sono radici, moltiplicate una per l'altro producono un numero quadrato o cubo ec. secondo che l'esponente delle radici è di quadrato o di cubo ec. 47.

Queste radici sorde $\sqrt{2}$ e $\sqrt{50}$ essendo moltiplicate una per l'altra producono il numero quadrato 100, di cui la radice è 10, ch'essendo eguale al prodotto delle radici di 2 e di 50, ci fa conoscere il prodotto di esse radici.

Mirabil cosa è, che non si possono conoscere due grandezze, e che si possa dimostrare il valore del loro prodotto ed anche qual ragione hanno fra di esse. Imperciocchè date sieno $\sqrt{2}$ e $\sqrt{18}$, so che il loro prodotto è $\sqrt{36}$, cioè 6; e siccome elle sono comunicanti, so ancora che $\sqrt{2}$ è a $\sqrt{18}$ come 1 a 3, poichè $\sqrt{2}=1\sqrt{2}$, e $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA SETTIMO.

48. *Dividere una radice ſorda incompleſſa per un' altra radice ſorda incompleſſa.*

La diviſione disfà ciò, che la moltiplicazione ha fatto; e ſe $\sqrt{2}$ moltiplicando $\sqrt{50}$ fa $\sqrt{100}$, ch'è la radice del prodotto di 2 per 50; dunque per divider $\sqrt{100}$ per $\sqrt{50}$, biſogna dividere 100 per 50, e la radice del quoziente di queſta diviſione, cioè $\sqrt{2}$, ſarà la radice cercata.

Parimente per dividere $\sqrt{aaab - abbb}$ per $\sqrt{aa - bb}$, biſogna ſemplicemente dividere $aaab - abbb$ per $aa - bb$, della qual diviſione il quoziente è ab e la radice di queſto quoziente, cioè $\sqrt{ab}$, è ciò che ſi cerca.

Se le radici ſono ridotte alle più picciole eſpreſſioni; ſi dividono tra loro tanto le grandezze fuori del ſegno che quelle ſotto il ſegno, conſervandovi il medeſimo ſegno tra i due quoti: perciò $15\sqrt{6}$ diviſo per $3\sqrt{2}$ dà $5\sqrt{3}$.

Ma quando le radici ſono comunicanti, non v'è d'uopo che di dividere ciò ch'è fuori del ſegno, e l'eſponente di queſta diviſione ſarà ciò che ſi cerca. P. e. ſe ſi divide $15\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, l'eſponente è 5, il ch' è evidente da ciò che abbiamo detto, che

la

la divisione disfà ciò che ha fatto la moltiplicazione.

E siccome accade, che alcune volte queste divisioni non si possono far esatte; in tal caso si scrivono le due grandezze l'una sopra l'altra in forma di frazione così $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}$, $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$; ovvero il ch'è lo stesso $\sqrt{\frac{60}{7}}$, $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{\frac{ab}{cd}}$.

Si avverta che se dato fosse da dividere una radice sorda per un'intiero, l'operazione si potrebbe fare scrivendo il quoto in una frazione in due modi. 1°. Sia da dividere $\sqrt{32}$ per 4, scrivo il quoto così $\frac{\sqrt{32}}{4}$ ovvero, il ch'è lo stesso, $\frac{1}{4}\sqrt{32}$, poichè $\sqrt{32}=1\sqrt{32}$ e $\frac{\sqrt{32}}{4}=\frac{1\sqrt{32}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{32}$. 2°. Si potrebbe anco porre l'intiero sotto il segno in questo modo $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}$; ovvero $\sqrt{\frac{32}{16}}=\sqrt{2}$. Che se l'intiero 4 avesse da essere diviso per $\sqrt{32}$; allora si potrebbe scrivere il quoto così $\frac{4}{\sqrt{32}}$ ovvero $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{16}{32}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. 49.

PRO-

PROPOSIZIONE XXII.

Problema Ottavo.

50. *Innalzare una radice sorda incompleßa a qualunque grado di potenza.*

I. Si moltiplichi la grandezza sotto il segno, una volta, due volte, tre volte ec. per se stessa e si averanno tutte le potenze della radice data. P. e. data sia $\sqrt{a}$, tutte le sue potenze saranno $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^4}$ ec. poichè $\sqrt{a^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, $\sqrt{a^3} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$. ec. Se si vuole la quarta, potenza di $\sqrt[3]{2}$, ella sarà $\sqrt[3]{16}$, se la sesta $\sqrt[3]{64}$; e così delle altre.

II. Ovvero si divida l'esponente del segno radicale per l'esponente della potenza a cui si vuole innalzare la grandezza sotto il segno, e si avrà la potenza cercata. Per innalzare $\sqrt[4]{3}$ alla seconda potenza, si divida 4 per 2, e il quoto 2 sarà l'esponente della radice cercata, cioè $\sqrt[2]{3}$. Imperciocchè se s'innalza col metodo primo $\sqrt[4]{3}$ alla seconda potenza, s'averà $\sqrt[4]{9}$ per questa seconda potenza; ma $\sqrt[2]{3} = \sqrt[4]{9}$, s. n. 35. Dunque ec.

Se l'esponente del segno radicale non è moltiplice dell'esponente della potenza, allora questa seconda regola non si può usare.

Se poi la radice sorda ha coefficiente, bisogna prima innalzare alla potenza richiesta la grandezza

dezza commensurabile o coefficiente, poi operare sopra la radice sorda come s'è detto. Sia da innalzare alla terza potenza $b\sqrt[6]{a}$, averemo col primo metodo $b^3\sqrt[6]{a^3}$, ovvero $b^3\sqrt{a}$ col secondo metodo, per la potenza cercata. Parimente in numeri, se s'innalza $3\sqrt[6]{5}$ alla seconda potenza, ella sarà col primo metodo $9\sqrt[6]{25}$, ovvero $9\sqrt[3]{5}$ col secondo metodo.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA NONO.

Estrarre qualunque radice da una radice sorda incompleſſa. 51

Lo che si fa in due modi. 1°. Estraendo la radice dalla grandezza sotto il segno, ponendo poi la radice ritrovata sotto il medesimo segno di prima. Se si estrae la radice seconda di $\sqrt[3]{a^2}$, si scrive $\sqrt[3]{a}$, e si ha la radice che si cercava. Se si vuole la radice terza di $\sqrt[3]{27}$, questa sarà $\sqrt[3]{3}$; il ch'è chiaro per se, perchè $\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{27}$. 2°. Si moltiplichi l'esponente del segno radicale della data incommensurabile per quello della radice cercata, e il prodotto sarà l'esponente del radicale della radice, che si desidera; sotto di cui converrà porre la grandezza, com'era sotto il primo segno.

Se

Se si vuole estrarre la radice seconda di $\sqrt[3]{a^2}$, si moltiplichi 3 per 2, e il prodotto 6 sarà l'esponente del radicale, sotto di cui si ha da porre la grandezza a^2 ch'era sotto il primo segno; e $\sqrt[6]{a^2}$ è ciò che si cerca. Se si vuole la terza radice di $\sqrt[2]{27}$, questa sarà $\sqrt[6]{27}$; e così delle altre.

COROLLARIO.

52. *Da questa e dalla precedente proposizione s'impara a ridurre due o molte radici sorde a un medesimo nome o segno, con maggiore facilità di quel che abbiamo fatto s. n. 36.*

Imperciocchè sieno queste $\sqrt[2]{a}$ e $\sqrt[4]{b^2}$; si potranno esse ridurre in due modi al medesimo segno.

1°. Moltiplicando per 2 l'esponente del radicale $\sqrt[2]{}$ e l'esponente della grandezza a^1 sotto il segno, ed averassi $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[2]{a}$ s. num. 22. e così le due radici date saranno ridotte al medesimo segno cioè a $\sqrt[4]{a^2}$ e $\sqrt[4]{b^2}$.

2°. Si divida per 2 l'esponente del radicale e della grandezza sotto il segno di $\sqrt[4]{b^2}$, sicche $\sqrt[2]{b}=\sqrt[4]{b^2}$ s. n. 22. onde con questo metodo le due radici date saranno ridotte a $\sqrt[2]{a}$ e $\sqrt[2]{b}$, tutte due dello stesso nome.

Si avverta però, che quando si fa la riduzione col secondo metodo, mentre l'esponente maggiore dei due segni radicali dati è di-

è diviso per il quoziente che nasce dividendo il maggiore esponente dei segni radicali per lo minore ; bisogna che la grandezza sotto il segno sia una perfetta potenza del grado di detto quoziente, seconda, terza ec. se il quoziente sarà 2, 3 ec. come nel dato esempio di $\sqrt[4]{b^2}$, mentre 4 è diviso per 2, b^2 è una perfetta potenza seconda.

CAP. III.

Le prime operazioni dell' Aritmetica sopra le radici immaginarie.

ABbiamo già detto che le grandezze negative poste sotto un segno radicale, che ha l'esponente pari, non sono reali, ma immaginarie. P. e. $\sqrt[2]{-b}$, $\sqrt[4]{-a^3}$, $\sqrt[6]{-3}$ ec. 53.

Ora di queste immaginarie radici si fa alcune volte uso nella risoluzione de' Problemi (come vedremo) ; sicchè conviene anco di esse trattare, in modo però succinto, perchè molte delle precedenti regole, esposte per le radici sorde reali, sono comuni al calcolo delle immaginarie. E per vero dire, si sommano due o più immaginarie radici, o unindole col segno $+$, cioè se queste sono $\sqrt{-a}$, e $\sqrt{-b}$, la loro somma sarà $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$; o sommando i loro coefficienti, se esse sono comunicanti, p. e. $a\sqrt{-d}$ a $4\sqrt{-d}$ somma-

te

te assieme divengono $6\sqrt{-d}$, per le regole accennate s. n. 44. Parimente si sottrano due radici immaginarie, unindole col segno $-$, p. e. $\sqrt{-a}$ e $\sqrt{-b}$ scrivendo $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$, se si ha da togliere $\sqrt{-b}$ da $\sqrt{-a}$; ovvero sottrando i coefficienti, se sono comunicanti; cioè levando $2\sqrt{-d}$ da $4\sqrt{-d}$ il residuo sarà $2\sqrt{-d}$, uniformemente alle regole s. num. 45.

Non si dee però operare con questa uniformità di regole moltiplicando e dividendo, a cagione che ogni radice immaginaria è accompagnata da due segni, uno fuori del segno radicale $+$ o $-$, per il quale si siegue le regole del più e del meno date nel Libro primo; l'altro è sotto il segno radicale ed è sempre $-$, di cui daremo le regole in progresso.

Nelle susseguenti proposizioni si suppone, che i radicali dell'una e dell'altra immaginaria grandezza abbiano il medesimo esponente.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA DECIMO.

54. *Moltiplicare due o più radici immaginarie tra loro.*

1°. Se si moltiplica una radice immaginaria per se stessa, hassi per prodotto la grandezza reale, di cui ella era radice; p. e. $\sqrt{-a}$ $\times\sqrt{-a}$

$\times\sqrt{-a} = -a \cdot \sqrt{-3} \times \sqrt{-3} = -3$; $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6} = -6$ ec. Questo è il solo caso, in cui la grandezza immaginaria diventa reale. Si noti però, che deesi aver riguardo anco a' segni $+$ o $-$, che sono fuori del radicale; sicchè se si moltiplica $+\sqrt{-a}$ per $-\sqrt{-a}$, il prodotto sarà $--a$, cioè $+a$; se $-\sqrt{-b}$, per $-\sqrt{-b}$, sarà il prodotto $+-a = -a$; e così degli altri.

Se due radici immaginarie sono comunicanti, si moltiplicano i coefficienti tra loro, e poi questo prodotto per la grandezza che nel moltiplicare l' immaginaria per se stessa s' è fatta reale, e si averà il prodotto ricercato. Per moltiplicare $+a\sqrt{-b}$ per $+c\sqrt{-b}$, si ritroverà $+ac. -b = -abc$. Ovvero $-a\sqrt{-b}$ per $-c\sqrt{-b}$ dà per prodotto $+ac. -b = -abc$. E in cifre $+3\sqrt{-2}$ per $-4\sqrt{-2}$ ha per prodotto $-12. -2 = 24$.

2°. Se si moltiplica una immaginaria per una immaginaria differente, p. e. $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, o $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-6}$, bisogna scrivere per prodotto $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ o $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6}$, ovvero $\sqrt{-a}\sqrt{-b}$, o $\sqrt{-3}\sqrt{-6}$, affine di distinguere nel prodotto stesso ciascheduna delle immaginarie che lo ha fatto.

Si può anche moltiplicare una grandezza reale per una immaginarie, p. e. a per $\sqrt{-c}$, ovvero $\sqrt{a}$ per $\sqrt{-c}$, e in tal caso si scrivono i prodotti in questo modo, $a \times \sqrt{-c}$, e $\sqrt{a} \times \sqrt{-c}$, ovvero $a\sqrt{-c}$, e $\sqrt{a}\sqrt{-c}$.

Si

Si noti che $\sqrt{-a}\sqrt{-b}$ vuol dire $\sqrt{-a}$ moltiplicata per $\sqrt{-b}$, e $\sqrt{a}\sqrt{-c}$, che $\sqrt{a}$ è moltiplicata per $\sqrt{-c}$; a distinzione di $\sqrt{-a\sqrt{-b}}$ che vuol dire radice seconda di $-a\sqrt{-c}$, perchè la gamba del primo radicale, estesa sopra tutta la grandezza così significa. Il che non ho voluto tralasciare d'avvertire per levare gli equivoci, i quali sono nell'acquisto di tutte le scienze di perniciosa conseguenza.

Avvertimento.

Ho seguite intieramente le regole date dal P. Reyneau nel suo Libro *della Scienza del Calcolo* per il segno — posto sotto il radicale delle radici immaginarie. Queste sono un po differenti da quelle che diede Mons. Ozanan nella sua Algebra, e del tutto diverse da quelle di Niccolò de Martino, il quale vuole ch' esse non sieno dissimili a quelle dei segni + e — posti fuori del radicale. Questa diversità di opinioni non è di veruna conseguenza; e ogni volta si anderà d'accordo delle regole, non si prenderà sbaglio: mentre lo scrivere le operazioni dell' Aritmetica piuttosto in un modo che in un'altro, è cosa arbitraria. Mi sono posto della parte del P. Reyneau, perchè così facendo, ho creduto rendere al calcolo delle immaginarie uno di que' vantaggi dell'Algebra, accennato nel Libro primo:

mo: cioè, che *nell' esame di una questione, in cui vi sieno una lunga serie di operazioni, si vede sempre il camino che si fa e tutt' i rapporti delle grandezze sopra quali si opera, perchè conservan' elleno i loro segni*. Così moltiplicando la grandezza reale $\sqrt{a}$ colla immaginaria $\sqrt{-b}$, segno il prodotto in questo modo $\sqrt{a}\sqrt{-b}$, in cui delle prime grandezze i loro segni sono conservati.

PROPOSIZIONE XXV.

Problema Undecimo.

Dividere una radice immaginaria per un' altra immaginaria radice. 55.

Qui non v'è d'uopo che di ritrovare un quoziente, che moltiplicato per il divisore dia un prodotto eguale al dividendo; come s'è detto nel primo Libro. Dunque 1°. Quando il divisore e'l dividendo contengono la medesima immaginaria radice, il quoziente sarà l'unità positiva; per la ragione già detta, che qualunque grandezza contiene una volta se stessa. Perciò $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} = +1$; $\frac{+\sqrt{-a}}{-\sqrt{-a}} = -+1 = -1$; $\frac{-\sqrt{-3}}{-\sqrt{-3}} = 1$.

Se saranno comunicanti, si divideranno i loro coefficienti, e il quoziente della di-

 vi-

visione di questi sarà quel che si cerca: $\frac{a\sqrt{-c}}{b\sqrt{-c}}=\frac{a}{b}$; $\frac{+a\sqrt{-d}}{-c\sqrt{-d}}=-\frac{a}{c}$; $\frac{4\sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}}=2$

2°. Ma quando il dividendo contiene una immaginaria, e 'l divisore un' altra immaginaria dissimile, la divisione si fa scrivendo il dividendo e 'l divisore in frazione così; $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-c}}$; $\frac{+\sqrt{-a}}{-\sqrt{-d}}$; $\frac{-\sqrt{-3}}{+\sqrt{-2}}$ ec.

Si può dividere nello stesso modo una reale per una immaginaria, $\frac{a}{\sqrt{-b}}$; $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-d}}$; $\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{-2}}$ ec. ed anche una immaginaria per una reale $\frac{\sqrt{-b}}{a}$; $\frac{-\sqrt{-2}}{+\sqrt{6}}$ ec. Avvertasi però, che se si avesse da dividere $-a$ per $\sqrt{-a}$, il quoziente sarà $\sqrt{-a}$, poichè $-a=\sqrt{-a}\sqrt{-a}$; dunque $\frac{-a}{\sqrt{-a}}=\frac{\sqrt{-a}\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}=\sqrt{-a}$; e parimenti $\frac{\sqrt{-a}}{-a}=\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}\sqrt{-a}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}$.

Per innalzare una immaginaria a potenza, ovvero per estrarre una radice qualunque da una immaginaria, le regole saranno le stesse di quelle §. n. 50. 51.

CAP.

CAP. IV.

Dei Binomj e Moltinomj.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE PRIMA.

La somma di due grandezze incommensurabili tra loro, si chiama Binomio. 56.

Quindi la grandezza $a + \sqrt{b}$ è un *Binomio*, se la radice $\sqrt{b}$ è incommensurabile colla grandezza a.

DEFINIZIONE II.

La differenza di due grandezze incommensurabili tra loro, si chiama Apotome *o* Residuo. 57.

Si dice p. e. che $a - \sqrt{b}$ è un'Apotome; e questi chiamansi ancora Binomj.

Euclide distingue molte sorti di Binomj e di Apotomi, a' quali egli dà differenti nomi, che tralascieremo di menzionare per non caricar la memoria senza necessità.

DEFINIZIONE III.

Una grandezza composta di molte grandezze incommensurabili tra loro è detta Moltinomio. 58.

La grandezza $a-\sqrt{b}+\sqrt{c}$ è *moltinomio*, se le tre graodezze che la compongono sono incommensurabili tra loro.

Questi Binomj o Moltinomj si distinguono per termini. Tutte le graodezze commeosurabili noo fanno che uo termioe, ed uno parimeote tutte le incommensurabili, che sooo comunicanti tra loro; sicchè il moltioomio $a+b-\sqrt{c}+\sqrt{a^2c}$ non cootiene che due termini, $a+b$ facendone uno, e $-\sqrt{c}+\sqrt{a^2c}=-\sqrt{c}+a\sqrt{c}$ ne fa uo'altro, oode può chiamarsi più tosto Binomio. (*a*)

Si supporrà nelle susseguenti proposizioni, che i segni radicali abbiano tutti un' eguale esponente, per maggior facilità de' Principiaoti.

PROPOSIZIONE XXVI.

Problema Duodecimo.

59. *Aggiungere un Binomio o Moltinomio ad un' altro; ovvero sottrarlo da un' altro.*

Qui non v' è bisogno di replicar regole per fare queste operazioni sopra i Binomj o Moltinomj, perchè basta unire quelle, del

(*a*) Gli Antiehi con Euclide hanno dato questo nome a tali grandezze; ma i Moderni chiamano indifferentemente Binomj tutte le grandezze letterali, che costano di duetermini, p. e. $a+b$, $c+\sqrt{d}$ ec. e Moltinomj le grandezze letterali di molti termini.

del primo Libro per le grandezze letterali complesse, colle di sopra accennate num. 44. e 45. per le radici sorde incomplesse, e s'averà ciò ch'è necessario per la risoluzione del Problema. Si dia un'occhiata a' seguenti Esempj.

Addizione.	*Addizione.*
$a+3\sqrt{ac}-4\sqrt{ad}$	$30-\sqrt{5}+4\sqrt{7}$
$d-\sqrt{ac}+5\sqrt{ad}$	$17+3\sqrt{5}-9\sqrt{7}$
Som. $a+d+2\sqrt{ac}+\sqrt{ad}$	*Som.* $47+2\sqrt{5}-5\sqrt{7}$

Sottrazione.	*Sottrazione.*
$a+3\sqrt{ac}-4\sqrt{ad}$	$30-\sqrt{5}+4\sqrt{7}$
$d-\sqrt{ac}+5\sqrt{ad}$	$17+3\sqrt{5}-9\sqrt{7}$
Ref. $a-d+4\sqrt{ac}-9\sqrt{ad}$	*Ref.* $13-4\sqrt{5}+13\sqrt{7}$

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA DECIMOTERZO.

Moltiplicare un Binomio o Moltinomio per un' altro Binomio o Moltinomio. 60

Si osservino le regole date nel Libro primo per le grandezze letterali complesse, e quelle s. num. 46. per le radici sorde incomplesse.

ESEMPJ.

$a+b+2\sqrt{b}$	$6+2\sqrt{5}$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$6+2\sqrt{5}$
$a\sqrt{a}$	
$+b\sqrt{a}+2a\sqrt{b}$	$36+12\sqrt{5}$
$+2b\sqrt{a}+a\sqrt{b}$	$20+12\sqrt{5}$
$+b\sqrt{b}$	
Prod. $\overline{a+3b}\times\sqrt{a}+\overline{3a+b}\times\sqrt{b}$	Prod. $56+24\sqrt{5}$

DEFINIZIONE.

61. *Si dice* contrario *di un Binomio o Moltinomio quella grandezza, che moltiplicando il Binomio o Moltinomio dato, produce una grandezza razionale.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

Problema Decimoquarto.

62. *Ritrovare il contrario di un Binomio o Moltinomio dato.*

Questo Problema serve di Lemma alla proposizione seguente.

Nella di lui risoluzione incomincieremo dai casi più semplici, e da questi passeremo ai più composti. Supporremo dunque, che i radicali dei Binomj o Moltinomj dati abbiano l' esponente 2, e cercheremo primieramen-

ramente i contrarj dei Binomj, poi 'dei Trinomj, Quadrinomj ec. non lasciando di cercare in fine i contrarj, nella suppofizione che i radicali fieno coll' esponente 3, 4, ec.

1°. Si cerchi il *contrario* di $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, il che facilmente si conseguirà, moltiplicando il Binomio dato per le medesime sue parti, una de' quali però col segno cambiato di + in —; ovvero di — in più, se fosse affetta col segno —. Imperciocchè si moltiplichi $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ \hline a+\sqrt{ab} \\ -\sqrt{ab}-b \\ \hline a \quad\quad -b \end{array}$$

Si averà per prodotto $a-b$, grandezza razionale; dunque $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ è il *contrario* di $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ per la Definizione. Se sia dato $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ per ritrovare il suo *contrario*, questo sarà $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, per le premesse.

2°. Sia il Trinomio $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, di cui si abbia da ritrovare il *contrario*. Primieramente bisogna moltiplicare il Trinomio per le sue tre parti, affette co' primi medesimi segni del più e del meno, a

distinzione dell'ultima parte, che ha d'ave-re il segno cambiato: cioè

$$\begin{array}{rl} \textit{Moltipl.} & \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \\ \textit{Per} & \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c} \\ \hline & a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+b+\sqrt{bc} \\ & \quad +\sqrt{ab}-\sqrt{ac} \quad -\sqrt{bc}-c \\ \hline & a+2\sqrt{ab} \quad * \quad +b \quad * \quad -c \end{array}$$

Si supponga le commensurabili, le quali non fanno (come abbiamo detto) che un termine solo, $a+b-c=d$, e il Trinomj proposto sarà cambiato in questo binomio $d+2\sqrt{ab}$, il di cui *contrario* per la regola prima è $d-2\sqrt{ab}$, perciò

$$\begin{array}{l} d+2\sqrt{ab} \\ d-2\sqrt{ab} \\ \hline d^2+2d\sqrt{ab} \\ \quad -2d\sqrt{ab}-4ab \\ \hline d^2 \quad * \quad -4ab \end{array}$$

Dunque il contrario del Trimonio $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ è il prodotto di $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ per $a+b-c-2\sqrt{ab}$, cioè $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c} \times a+b-c-2\sqrt{ab} = a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-a\sqrt{c}-b\sqrt{a}-c\sqrt{a}+2\sqrt{abc}+b\sqrt{b}-b\sqrt{c}-c\sqrt{b}+c\sqrt{c}$, il che si cercava.

3°. Se poi si volesse ritrovare il *contra-*

rio

rio di $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$; bisognerebbe moltiplicare il quadrinomio dato per $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}$ (*a*); e supponendo $a+b-c-d=f$, s'averebbe per prodotto $f+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}$, il quale moltiplicato per $-f+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}$ dà per prodotto (supponendo $f^2=-c^2+4ab+4cd$) $f^2-8\sqrt{abcd}$. Finalmente converrebbe moltiplicare $f^2-8\sqrt{abcd}$ per $f^2+8\sqrt{abcd}$, che darebbe per prodotto $f^4-64\,abcd$, grandezza razionale. Sicchè rilevasi che il *contrario* di $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ è $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}\times\overline{c+d-a-b+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}}\times\overline{4ab+4cd-c^2+8\sqrt{abcd}}$.

Si procederà nello stesso modo, se il Moltinomio avesse più parti, p. e. cinque, sei, sette ec.

Si può estendere questo metodo per ritrovare il *contrario* di un Binomio o Moltinomio, che abbia tutt'i termini col segno $\sqrt[3]{}$, o $\sqrt[4]{}$, ovvero $\sqrt[5]{}$ ec. lo che però non succede che di raro e nelle alte Equazioni soltanto; ma siccome ivi troveremo metodi più facili di quelli sossimo ora per dare,

(*a*) Si cambiano i segni di + in —, o di — in + cercando i *contrarj*, acciocchè nella moltiplicazione si cancellino i termini, come si può osservare di sopra, ove si sono in esteso fatte le operazioni. E per conseguir ciò facilmente, se i termini sono due o tre, si cambia il segno ad uno, se sono quattro o cinque, a due, se sei o sette a tre, e così in simigliante modo degli altri.

re, così qui basterà ch' esponiamo la regola per ritrovare il contrario di un Binomio, che abbia i termini col segno $\sqrt[3]{}$, ovvero $\sqrt[4]{}$ ec.

Sia il Binomio $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, di cui si voglia ritrovare il contrario. Bisogna moltiplicarlo non per $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, ma per il quadrato di $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, cioè per $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-2\sqrt[3]{ab}$, e s'averà il prodotto $a-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}+b$; a cui si aggiunga il prodotto di $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ per $\sqrt[3]{ab}$ per avere $a-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}=a+b$: sicchè il *contrario* del Binomio $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ rilevasi essere $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$: cioè il quadrato di $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ senza i coefficienti dei suoi termini. Per questa ragione il *contrario* di $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ è $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$. e così degli altri.

Se poi il Binomio sarà $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$; allorà converrà ritrovare il suo *contrario*, moltiplicandolo prima per il cubo di $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$, cioè per $\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a^2b}+3\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}$ che darà per prodotto $a-2\sqrt[4]{a^3b}+2\sqrt[4]{ab^3}-b$, a cui se vi si aggiunge il prodotto $\overline{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\times\overline{2\sqrt[4]{a^2b}-2\sqrt[4]{ab^2}}=2\sqrt[4]{a^3b}+2\sqrt[4]{a^2b^2}-2\sqrt[4]{ab^3}$, s'averà la somma $a-b$ commensurabile; perciò il *contrario* di $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$ è $\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}$ cioè il quadrato di $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$, toltine i coefficienti dei suoi termini.

Se il Binomio farà $\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}$, si ritroverà collo stesso metodo il suo *contrario* essere $\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}$; e generalmente il *contrario* di qualunque Binomio farà tutt' i termini della Tavola L. IV. num. 23. corrispondenti a quel numero, ch' è eguale all' esponente dei radicali del Binomio, diminuito dell'unità, scritti ad uno ad uno sotto il medesimo radicale del Binomio proposto; tutt' i dispari col segno posito $+$, e i pari col negativo $-$. P. e il contrario di $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$ farà $\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}-\sqrt[6]{b^5}$; e così di tutti gli altri: supposto però, che i termini del Binomio dato sieno uniti col segno $+$; che se fossero uniti col $-$, bisognerebbe scrivere tutt' i termini col segno $+$.

La dimostrazione di questo Problema chiaramente apparisce dalle operazioni, che abbiamo fatte per risolverlo.

PROPOSIZIONE XXIX.

Problema Decimoquinto.

Dividere un Binomio o Moltinomio per un' altro Binomio o Moltinomio. 63.

I. Se il dividendo contiene esattamente il divisore, si opererà come s' è fatto sopra le grandezze letterali complesse, osservando nel tempo stesso le regole date §. num. 48. per le radici incomplesse. Si dia una occhiata agli esempj che seguono.

Di-

Dividendo	*Divisore*
$a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$
$a\sqrt{a}+a\sqrt{b}$	*Quoto* $a+2\sqrt{ab}+b$
$0+2a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}$	
$2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$	
$0+b\sqrt{a}+b\sqrt{b}$	
$b\sqrt{a}+b\sqrt{b}$	
$0 \quad 0$	

Dividendo	*Divisore*
$2\sqrt{6}+4\sqrt{12}-\sqrt{15}-\sqrt{30}$	$\sqrt{3}+\sqrt{6}$
$2\sqrt{6}+4\sqrt{12}$	$2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ *Quot.*
$0 \quad 0 \quad -\sqrt{15}-\sqrt{30}$	
$-\sqrt{15}-\sqrt{30}$	
$0 \quad 0$	

II. Se poi il dividendo non contiene esattamente il divisore, allora bisogna scrivere il quoto in una frazione. P. e. se si avesse da dividere $3\sqrt{5}+4\sqrt{7}$ per $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, si supporrà questa frazione $\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{7}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$, poi moltiplicando il numeratore e'l denominatore per $4\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, *contrario* del denominatore, si ritroverà $\frac{12\sqrt{15}+9\sqrt{10}+16\sqrt{21}+12\sqrt{14}}{30} = \frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{7}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$: e riducendo la frazione col denominatore razionale a' minimi termini, ella sarà $\frac{2}{5}\sqrt{15}+\frac{3}{10}\sqrt{10}+\frac{8}{15}\sqrt{21}+\frac{2}{5}\sqrt{14}$.

Se si vuol dividere 12 per $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, si moltiplicherà i due termini per $\sqrt{7}+\sqrt{3}$,

contrario del divisore, e s'averà questa frazione $\frac{12\sqrt{7}+12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{7}+3\sqrt{3}$, per quel che si cercava.

Parimente se si divide $a-b$ per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, il quoziente sarà $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\overline{a-b}\times\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\overline{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$ $=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

PROPOSIZIONE XXX.

Problema Decimosesto.

Innalzare un Binomio o Moltinomio a qualunque Potenza. 64.

Ciò si fa colle reiterate moltiplicazioni del Binomio o Moltinomio, che si vuole innalzare a potenza; e queste non essendo differenti da quelle, fatte nel L. II. per le gradezze letterali razionali, si consulti quel luogo, ove s'apprenderà facilmente la risoluzione di questo Problema.

PROPOSIZIONE XXXI.

Problema Decimosettimo.

Estrarre qualunque radice da un Binomio o Moltinomio. 65.

Questo Problema, così generalmente espresso,

so, non può essere risolto che colle alte Equazioni. Ivi si darà un metodo facile e generale per estrarre qualunque radice da qualsivoglia Binomio o Moltinomio. Mentre qui non si potrebbe dare che delle regole particolari imbarazzanti ed incerte; a riserva di quelle per *estrarre la radice seconda da un Binomio, di cui i segni radicali hanno per esponente il* 2. Sia dunque ristretto il Problema a questo particolar caso; per la di cui risoluzione ecco ciò che bisogna premettere.

Se si innalza il Binomio $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ alla seconda potenza, s'averà il Binomio $a+b$ $+2\sqrt{ab}$; il che fa vedere, che in ogni Binomio seconda potenza di un'altro Binomio, l'uno dei termini $a+b$ è la somma dei quadrati dei due termini, che compongono il Binomio radice, e l'altro termine $2\sqrt{ab}$ è il doppio del prodotto dei due termini $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, che sono nel Binomio radice. Ma i quadrati $a+b$ dei due termini $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, che sono distinti nel quadrato $a+b+2\sqrt{ab}$, sono però confusi ne' Binomj numerici, come in $5+2\sqrt{6}$, quadrato di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Perciò l'osservazione accennata di sopra non può essere regola generale per estrarre la radice seconda dai supposti Binomj; per il che bisogna farvi ancora la seguente osservazione.

Se si quadra $a+b$, s'averà il prodotto $a^2+2ab+b^2$; da cui si sottri il quadrato

4ab

$4ab$ dell'altro termine $2\sqrt{ab}$, e 'l residuo $a^2 - 2ab + bb$ farà il quadrato di $b - c$, ch'è la differenza di a e b, quadrati dei due termini $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ del Binomio radice.

Si prenda dunque $a - b$, radice seconda di $a^2 - 2ab + bb$, e 1°. se l'aggiunga al termine $a + b$ del Binomio $a + b + 2\sqrt{ab}$, e la somma farà $2a$, di cui la metà è a, quadrato del primo termine di $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. 2°. Si sottri $a - b$ da $a + b$, e 'l residuo farà $2b$, la di cui metà b è il quadrato del secondo termine $\sqrt{b}$ di $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Da queste premesse sono dedotte le seguenti regole per estrarre la radice quadrata da un Binomio espresso co' segni radicali della seconda potenza.

Sia p. e. il Binomio $7 + \sqrt{48}$. 1°. Bisogna sottrare il quadrato del termine minore dal quadrato del termine maggiore; cioè 49, quadrato di 7, da 48; e prendere la radice quadrata dal residuo.

2°. Bisogna aggiungere questa quadrata radice del residuo al termine maggiore, e sottrarla dallo stesso termine maggiore; cioè nel dato Binomio, aggiungere 1 a 7, e la somma farà 8, e sottrarre 1 da 7, e'l residuo farà 6.

3°. Bisogna in fine prender separatamente la radice seconda della metà della somma, e della metà del residuo, e comporre un Binomio di queste due radici, unindole co' medesimi segni del + o —, co' quali uniti

sono

sono i termini del Binomio dato. Del nostro Binomio dunque la radice seconda sarà $\sqrt{4}+\sqrt{3}$: lo che si cerca.

Si avverta, che questa regola sarà utile, sempre che col suo mezzo si potrà ritrovare di un Binomio dato la radice quadrata, espressa in un Binomio della stessa natura che il proposto, come nel Binomio di sopra $7+\sqrt{48}$, che ha per sua quadrata radice $\sqrt{4}+\sqrt{3}$, espressa co' medesimi segni radicali del proposto Binomio. Ma se si cerca la radice quadrata di $\sqrt{32}+\sqrt{24}$, per le regole di sopra, ella sarà $\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{}$, espressa con differenti segni di quelli del Binomio dato. In tal caso, lasciata da parte la fatica di questa regola, se la esprima piuttosto in questo modo $\sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{24}}$, che farà lo stesso.

Ora per sapere, se si può estrarre da un Binomio la radice quadrata, in maniera che ella sia espressa co' medesimi segni radicali del dato Binomio; bisogna osservare, se nel Binomio dato uno dei termini sia commensurabile, e l'altro incommensurabile; e se il quadrato del commensurabile sia dell' incommensurabile maggiore di un quadrato; lo che chiaramente apparisce da ciò, che s'è premesso per risolvere questo Problema. Se queste condizioni il Binomio non comprende, allora si potrà estrarre da esso la radice quadrata, ponendo-

la

la ſotto una radice univerſale, come s' è detto.

Cap. V.

Delle Radici compleſſe.

Abbiamo detto, che quelle Radici, le quali 66.
hanno ſotto il ſegno radicale una grandezza compleſſa, ſi chiamano *radici compleſſe*, come $\sqrt{a+bc-d}$; e ſe tra le parti della grandezza compleſſa v'è una grandezza col ſegno radicali, diconſi *univerſali*, per eſemp. $\sqrt{cd+\sqrt{ab}-\sqrt{e}}$ ec. Queſte naſcono da que' Binomj o Moltinomj, da' quali col metodo indicato nella propoſizione precedente non ſi può eſtrarre la radice; onde alcune volte conviene ſopra di eſſe fare le operazioni Aritmetiche.

Il che però difficile non ſarà; conſiſtendo l'addizione e la ſottrazione di eſſe dal ſommare o ſottrarre i loro coefficienti, ſe ve ne hanno; o dall'aggiungerle col ſegno +, o ſottrarle col ſegno —, a guiſa di radici incompleſſe. Così pure la moltiplicazione, diviſione ec. ſi faranno nello ſteſſo modo delle radici incompleſſe, moltiplicando, dividendo ec. le grandezze compleſſe ſotto i ſegni radicali, ponendo poi i prodotti, i quoti ec. ſotto i medeſimi ſegni. E ciò baſti per intel-

ligenza di questo calcolo, di cui rare volte se ne fa uso.

SEZIONE QUARTA

Dei Logaritmi.

E' stato insegnato come far si deono le Operazioni Aritmetiche sopra le grandezze espresse con cifre e con lettere, intiere e rotte, razionali, e irrazionali; ora conveniente cosa è trattare di un'altro metodo con cui far si possa più facilmente alcune di queste operazioni sopra le medesime grandezze. Il rinomatissimo metodo dei Logaritmi, inventato dal Nepero, è quello che ci porge questa facilità; e per vedere quale e quanto sia il di lui vantaggio, divideremo la presente Sezione in tre Capi.

Nel primo esamineremo l'origine e proprietà dei Logaritmi; nel secondo daremo il metodo di costruirli; e nel terzo spiegheremo le Regole da seguirsi nel far uso dei medesimi.

C A P. I.

Dell' Origine e proprietà dei Logaritmi.

LA parola *Logaritmo* è greca, e costa di due altre parole, una de' quali significa *ragione* e l' altra *numero*. Comunemente si prende questa Parola Logaritmi per esprimere dei numeri in progressione Aritmetica, che corrispondono ad altri numeri in progressione Geometrica. 67.

Imperciocchè, se consideriamo tutte le potenze di una grandezza, p. e. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. ec. ritroviamo, ch' esse formano una progressione geometrica, siccome i loro esponenti ne fanno un' Aritmetica.

÷÷ a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. ec.

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . ec.

Supponiamo, che nella progressione Geometrica regni la ragione suddecupla; allora essa si trasforma in questa

÷÷ 1.10.100.1000.10000.100000.1000000.ec.

a cui vi corrisponda parimente l' Aritmetica

÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. ec.

I termini di questa progressione Aritmetica sono i Logaritmi, de' quali trattiamo; sicchè per parlar più precisamente i *Logaritmi sono numeri naturali che corrispondono ad altri numeri in progressione suddecupla*; secondo l' invenzione dei medesimi pub-

blicata l'anno 1614 dal Baron Nepero Scozcefe, e perfezionata dipoi da Mr. Briggio Inglefe.

I Logaritmi dunque fono la medefima cofa che gli efponenti di una data grandezza follevata a qualunque grado di potenza, e perciò le proprietà di quelli non deono differire dalle proprietà di quefti, indicate fu num. 9. Quindi apparifce che per mezzo di effi fi fanno con brevità alcune operazioni dell'Aritmetica; imperciocchè ficcome la fomma di due termini della progreffione Aritmetica è l'efponente di una potenza fatta colla moltiplicazione di due potenze, che hanno per efponenti i detti due termini della progreffione Aritmetica, p. e. $2+3$ ovvero 5 è l'efponente di a^5, potenza fatta colla moltiplicazione di a^2 per a^3, ovvero di aa per aaa, perchè quefto prodotto è $aaaaa$ o a^5, fecondo le regole della della moltiplicazione; così 5 è il Logaritmo di 100 moltiplicato per 1000, cioè di 100000. Parimente poichè la differenza di due termini della progreffione Aritmetica è l'efponente del quoto di due potenze divife l'una per l'altra, $5-3=2$, differenza di 3 fottratto da 5 è l'efponente di una potenza, la quale rifulta dalla divifione della potenza quinta divifa per la terza, cioè $\frac{a^5}{a^3}=a^2$, giufto le regole della divifione; così $5-3=2$ è il Logaritmo di $\frac{100000}{1000}=100$.

Per

Per la stessa ragione, in vece d'innalzare un numero considerato come un termine di una progressione suddecupla, a qualunque grado di potenza, si può moltiplicare il Logaritmo del numero dato, per l'esponente del grado, a cui si vuole innalzarlo: e in luogo di far uso delle regole ordinarie per estrarre da esso una data radice, si può dividere il Logaritmo del numero dato, per l'esponente della radice, che si desidera estrarre, nella stessa maniera come abbiamo fatto s. num. 9.

L'utilità di questa invenzione è grandissima; se si considera, quanto imbarazzanti sieno le operazioni del dividere e moltiplicare numeri grandi, come 76493 per 695421; e quanto sia laborioso e soggetto ad errore innalzare una grandezza a potenza, o estrarne la radice, di gradi alti, p. e. del duodecimo, del ventesimo grado ec. Ad oggetto di togliere quest'imbarazzi, ed i pericoli di errare sono stati inventati i Logaritmi; perchè col mezzo di essi, come si è veduto, si somma e si sottra, in vece di moltiplicare e dividere; si moltiplica, e si divide, in luogo d'innalzare a potenza, o estrarre radice: il che è molto più facile, come ogni uno chiaramente conosce.

C A P. II.

Della maniera di costruire le Tavole dei Logaritmi.

70. DAlla unione adunque di due progressioni, una Geometrica, e l'altra Aritmetica nascono, come si è detto, i Logaritmi. Si noti però, che l'Aritmetica dee essere una progressione di numeri naturali, incominciante da zero. La geometrica poi dee incominciare dall'unità, e progredire colla ragione suddecupla; seguendo il costume dell'Auttore di questo ritrovato: il quale, benchè abbia veduto, che qualunque altra progressione poteva condurre allo stesso fine, non ostante ha voluto scegliere la suddecupla (credo) perchè sia analoga alla nostra numerica Aritmetica.

÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. ec.

∺ 1.10.100.1000.10000.100000.1000000.ec.

Il Logaritmo di 100 è 2, di 10 è 1, di 1 è zero, e per conseguenza il Logaritmo di una frazione ch'è minore dell'unità, dee essere un numero minore di zero, cioè un numero negativo, il quale chiamasi *Logaritmo difettivo*.

Qui però non si vegono i Logaritmi di 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. ec. e pure necessaria cosa è ritrovarli per avere i Logaritmi di tutt'i numeri, onde poter fare col mezzo di essi le operazioni già menzionate. Si ritrovano questi con grandissima fattica; e per giudicare quanto grande ella

ella sia, basta cercar il Logaritmo di 9 per conoscere questa verità. Imperciocchè per ritrovare questo Logaritmo bisogna prima cercare tanti medj proporzionali tra 1 e 10, fin che se ne ritrova uno eguale a 9, o di cui la differenza con 9 non sia considerabile. Bisogna nel tempo stesso ritrovare a ciascheduno di questi medj proporzionali, un termine nella progressione Aritmetica, medio proporzionale a quelli corrispondente, per avere, in fine il Logaritmo di 9.

Questi medj non possono sempre esprimersi co' numeri interi, ed averli nel tempo stesso esatti; poichè non tutt'i prodotti degli estremi geometrici sono potenze seconde perfette, nè tutt'i prodotti degli estremi Aritmetici sono numeri pari. Sicchè conviene far uso delle decimali per giugnere ad una espressione sì poco differente dal vero, di modo che l'errore non sia considerabile; come abbiamo veduto nel L. V.

Bisogna dunque esprimere gli estrami in decimali per avere questi medj per approssimazione, p.e. in vece di 1 scrivere 1. 0000000, in cambio di 10 scrivere 10. 0000000, e così procedendo ec.

Si dia una occhiata alla seguente Tavola, la quale non comprende che il principio delle supposizioni, che si fa per ritrovare il solo Logaritmo di 9; e da ciò si può giudicar, quanto grande sia la fatica per comporre le Tavole intiere dei Logaritmi.

	Progressione Geometrica.	*Logaritmi.*
A	1. 0000000	0. 0000000
C	3. 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
B	10. 0000000	1. 0000000
D	5. 6234132	0. 7500000
C	3. 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
E	7. 4989421	0. 8750000
D	5. 6234132	0. 7500000

Da questa Tavola comprender si può, che tra A e B conviene cercare un medio proporzionale geometrico C, radice quadrata del prodotto di A per B. Dopo di ciò si cerca il Logaritmo di C, cioè un numero, che sia medio Aritmetico tra 0. 0000000 e 1. 0000000. Se lo ritrova sommando questi due termini, e prendendo la metà della somma, ovvero, poichè il primo termine è zero, prendendo la metà dell'altro, la quale metà sarà il medio Aritmetico che si cerca.

Ora il medio proporzionale C trovato è minore di 9. 0000000, bisogna dunque cercare un'altro medio proporzionale tra il minore C, e'l maggiore B. Truovo D ed il suo Logaritmo; ma essendo anche questo medio D, minore del desiderato, bisogna nello stesso modo tra D ed il maggiore termine B cercare un terzo medio proporzionale E ed il suo Logaritmo, il quale non sarà peranco il de-

desiderato 9. 0000000. Finalmente continuando a cercare dei medj proporzionali geometrici tra il prossimo minore ed il prossimo maggiore, si avranno dei numeri, che avvicineranno si sempre più al numero proposto 9. 0000000, il quale finalmente si troverà essere il ventesimo sesto medio proporzionale; come si può vedere nel Corso Matematico di Wolfio, in cui è distintamente espressa tutta questa operazione. Qual' e quanta dunque sarebbe la fatica, se si avessero a comporre le Tavole intiere, cioè trovare i Logaritmi dall' unità fino a cento mille, ed ancora più lontano; se per ritrovare il solo Logaritmo di 9 abbisognano tante operazioni?

Questa fatica è stata condotta a fine fin dal principio della sua invenzione. I Logaritmi sono disposti coll' ordine naturale dei numeri in Tavole, de' quali ecco il principio. Nella prima colonna ch'è la più stretta, sono li numeri assoluti, e a dirimpetto i loro Logaritmi, ritrovati come s'è detto. Tutt' i medj geometrici, che sono stati ritrovati prima per formarle non appariscono in esse, poichè nulla servono per l' uso che si vuol fare.

Si Osservi, che tutt' i Logaritmi dei numeri, che sono tra 10 e 100, cominciano dall' unità; quelli tra 100 e 1000 cominciano da 2, e così susseguentemente coll' ordine dei numeri naturali; e queste cifre 1, 2, ec. separate già nelle tavole dalle altre con un punto, (secondo il costume Inglese di scrivere le frazioni decimali) chiamansi le *Caratteristiche dei Logaritmi.*

Tavole de' Logaritmi.

N.	Logaritmi	N.	Logaritmi
1	0. 0000000	31	1. 4913617
2	0. 3010300	32	1. 5051500
3	0. 4771213	33	1. 5185139
4	0. 6020600	34	1. 5314789
5	0. 6989700	35	1. 5440680
6	0. 7781513	36	1. 5563025
7	0. 8450980	37	1. 5682017
8	0. 9030900	38	1. 5797836
9	0. 9542425	39	1. 5910646
10	1. 0000000	40	1. 6020600
11	1. 0413927	41	1. 6127839
12	1. 0791812	42	1. 6232493
13	1. 1139434	43	1. 6334685
14	1. 1461280	44	1. 6434527
15	1. 1760913	45	1. 6532125
16	1. 2041200	46	1. 6627578
17	1. 2304489	47	1. 6720979
18	1. 2552725	48	1. 6812412
19	1. 2787536	49	1. 6901961
20	1. 3010300	50	1. 6989700
21	1. 3222193	51	1. 7075702
22	1. 3424227	52	1. 7160033
23	1. 3617278	53	1. 7242759
24	1. 3802112	54	1. 7323938
25	1. 3979400	55	1. 7403627
26	1. 4149733	56	1. 7481880
27	1. 4313638	57	1. 7558749
28	1. 4471580	58	1. 7634280
29	1. 4623980	59	1. 7708520
30	1. 4771213	60	1. 7781513

Tavole de' Logaritmi.

N.	*Logaritmi*	N.	*Logaritmi*
61	1.7853298	91	1.9590414
62	1.7923917	92	1.9637878
63	1.7993405	93	1.9684829
64	1.8061800	94	1.9731279
65	1.8129134	95	1.9777236
66	1.8195439	96	1.9822712
67	1.8260748	97	1.9867717
68	1.8325089	98	1.9912261
69	1.8388491	99	1.9956352
70	1.8450980	100	2.0000000
71	1.8512583	101	2.0043214
72	1.8573325	102	2.0086002
73	1.8633229	103	2.0128372
74	1.8692317	104	2.0170333
75	1.8750613	105	2.0211893
76	1.8808136	106	2.0253059
77	1.8864907	107	2.0293838
78	1.8920946	108	2.0334238
79	1.8976271	109	2.0374265
80	1.9030900	110	2.0413927
81	1.9084850	111	2.0453230
82	1.9138139	112	2.0492180
83	1.9190781	113	2.0530784
84	1.9242793	114	2.0569049
85	1.9294189	115	2.0606978
86	1.9344984	116	2.0644080
87	1.9395193	117	2.0681859
88	1.9444827	118	2.0718820
89	1.9493900	119	2.0755470
90	1.9542425	120	2.0791812

CAP.

C A P. III.

Uso delle Tavole dei Logaritmi.

PROPOSIZIONE XXXII.

PROBLEMA VENTESIMOTERZO.

71. TRovare il Logaritmo di un numero intiero.

Il Problema ha due casi; o il numero intiero è tra quelli delle Tavole dei Logaritmi, cioè tra uno e 10000; ovvero è maggiore del massimo di queste Tavole, ma non eccede il 100000000.

Primo Caso.

Se il numero dato è uno di quelli delle Tavole; il suo Logaritmo si ritrova nelle Tavole stesse a canto di detto numero.

Secondo Caso.

Se il dato numero è maggiore di 10000, non eccedente però il 100000000; allora per ritrovarvi il suo Logaritmo conviene operare nel seguente modo.

Sia p. e. dato il numero 3567894, di cui si voglia ritrovare il Logaritmo. Si taglino tre cifre da dritta a sinistra, e rimarrà

di

di poi 3567, numero ch' è nelle Tavole. Si ritrovi di questo numero il Logaritmo; egli è 3. 5523031, a cui vi si unisca il Logaritmo di 1000 ch' è 3. 0000000, e s' averà 6. 5523031 Logaritmo di 3567000; imperciocchè 3567000 = 3567 x 1000, dunque per quel che abbiamo detto nel Capo primo, Logarit. di 3567000 = Logarit. di 3567 + Logarit. di 1000 = 3. 5523031 + 3. 0000000 = 6. 5523031.

Ora, siccome il numero 3567000 è minore del proposto, così il di lui Logaritmo è minore di quel che si cerca; bisogna ritrovare questa differenza. La differenza del Logaritmo di 3567 da quello di 3568 è 1217; e tale ancora è la differenza del Logaritmo di 3567000 dal Logaritmo di 3568000. Dunque se, differenza 1000 ne' numeri dà differenza nei Logaritmi di 1217; differenza 894 ne' numeri darà perciò differenza ne' Logaritmi, di 1087: quarto termine proporzionale geometrico. Si aggiunga questo quarto termine geometrico 1087 a 6. 5523031, Logaritmo di 3567000, e la somma 6. 5524118, sarà il Logaritmo cercato.

La Dimostrazione si rileva da ciò che s' è operato, e dalla Nota seguente.

Nota I.

Abbiamo tolte tre sole cifre dal proposto numero 3567894, ad oggetto che il residuo del-

delle troncate, cioè 3567 s'accosti, quanto più si può, al massimo dei numeri delle Tavole; e ciò perchè, stante la natura dei Logaritmi, essendo i medj Aritmetici tra 1000 e 10000 in maggior numero che tra 100 e 1000, tra 10 e 100 ec. le differenze dei Logaritmi sono meno ineguali al fin della Tavola che nel principio, cioè s'accostano più alla proporzione Aritmetica dei numeri naturali: sopra di che è fondato il metodo di questa operazione.

Nota II.

Si è detto che il numero eccedente il massimo delle Tavole, non debba passare 100000000 perchè qualunque numero che sta dentro questo limite può essere diviso in due numeri, in modo che ognuno di questi si ritrovi nelle Tavole; come s'è veduto nel sopraccennato esempio.

Si può dunque trovare il Logaritmo di un numero maggiore di 100000000, poichè si può dividerlo in tre, quattro ec. numeri esistenti nelle Tavole, ed operare uniformemente alle regole del Problema.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA VIGESIMOQUARTO.

Dato un Logaritmo, ritrovare il numero a cui egli appartiene. 72.

Questo Problema può avere tre casi; imperciocchè, o il Logaritmo dato è nelle Tavole, ed allora la risoluzione si ha osservando, qual numero gli sta a canto; o non è nelle Tavole, benchè sia minore del massimo di esse; o finalmente è maggiore di questo massimo.

Caso Secondo.

Se il Logaritmo dato, minore del massimo delle Tavole non si ritrova nelle Tavole stesse, è un segno, che il numero ad esso corrispondente è accompagnato con una frazione.

Sia il Logaritmo dato 3. 9531250, e si voglia ritrovare il numero che corrisponda ad esso; si operi così. Prendasi il Logaritmo che nelle Tavole è prossimamente minore al dato, cioè 3. 9530828, a cui vi corrisponde il numero 8976; si noti che la differenza di questo Logarirmo dall' alrro dato è 422; poi si pigli il Logaritmo del numero, che immediatemente seguita 8976, cioè 3. 9531312, Logaritmo di 8977, il

il quale dal primo che si ha preso è differente di 484. Dunque se differenza 484 di Logaritmi dà ne' numeri differenza 1, cosa darà differenza di Logaritmi 422? Ma per avere il quarto termine di questa proporzione, che dee essere un rotto, più vicino al vero che si può; si divida l'unità della differenza ne' numeri in 100, 1000, ec. parti: allora

484. 100 :: 422. 87

dunque $\frac{87}{100}$ vale la differenza 422 dei Logaritmi, la qual frazione unita a 8976 darà il numero che si cercava.

Questo Metodo è fondato sulla supposizione, che le differenze dei numeri sieno proporzionali a quelle dei Logaritmi; il che presso a poco è vero, ne' numeri però che sono tra mille e dieci mille, dove le differenze dei Logaritmi crescono meno inegualmente che nel principio, come abbiamo detto nella prima nota del Problema precedente. Onde, se il Logaritmo proposto è minore del Logaritmo di 1000, conviene fare l'operazione in differente modo; cioè bisogna prendere la somma del Logaritmo proposto e del Logaritmo di qualche altro numero, in modo però che questa somma sia maggiore del Logaritmo di 1000, e non ecceda nel tempo stesso quello di 10000. Si noti il numero, che corrisponde al Logaritmo aggiunto, e si ritrovi anco il numero corrispondente alla somma del Logaritmo dato e dell'aggiunto; si divida il secon-

ſecondo di queſti numeri per il primo, e ſi averà il numero, che ſi cerca.

ESEMPIO.

Sia dato il Logar. 1.8243945
vi ſi aggiunga 2.0000000, Logarit. di 100
Somma 3.8243945, a cui vi corriſponde il numero 6674 $\frac{13}{100}$, che diviſo per 100 diviene 66 $\frac{7413}{10000}$, numero che ſi cercava.

Terzo Caſo.

Finalmente ſe il propoſto Logaritmo è maggiore del maſſimo delle Tavole; ſi ſottri dal propoſto, il Logaritmo di un numero più picciolo che ſia poſſibile, ma che ſia tale però, ſicchè il reſiduo divenga minore del maſſimo delle Tavole. Si trovino i numeri corriſpondenti al Logaritmo ſottratto e al Logaritmo reſiduo, e queſti ritrovati numeri ſi moltiplichino poi uno per l'altro; il prodotto di eſſi ſarà il numero che ſi cerca.

ESEMPIO.

Sia il Logar. dato 4.5524118
ſi ſottri 0.6020600, Logarit. di 4
Logarit. reſiduo 3.9503518, a cui corriſponde il numero 8919 $\frac{73}{100}$. Dunque 8919 $\frac{73}{100}$

$\times 4 = 35678\frac{24}{25}$ è il numero che si cercava.

Non ha bisogno di essere dimostrata la risoluzione di questo Problema, poich'ella dipende dalla natura dei Logaritmi, e dal metodo dell'Operazione.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Problema Ventesimoquinto.

73. *Moltiplicare due numeri uno per l'altro col mezzo dei Logaritmi.*

Si ritrovino per il Problema s.° num. 71. i Logaritmi, che corrispondano ai numeri dati, si sommino questi Logaritmi; e la somma sarà il Logaritmo del prodotto, che si cerca, per la natura dei Logaritmi.

PROPOSIZIONE XXXV.

Problema Ventesimosesto.

74. *Dividere due numeri uno per l'altro col favore dei Logaritmi.*

Nel Capo primo di questa Sezione abbiamo veduto, che il Logaritmo di uo quoto è eguale alla differenza dei Logaritmi dei numeri divisi uno per l'altro; dunque per divide-

dividere due numeri uno per l' altro col mezzo dei Logaritmi bisogna cercare questa menzionata differenza di Logaritmi, e così il Problema sarà risolto.

COROLLARIO.

Poichè ogni frazione è un quoto; dunque il Logaritmo di una frazione si avrà sottrando il Logaritmo del denominatore dal Logaritmo del numeratore. Che se il numeratore è minor del denominatore, il Logaritmo della frazione sarà negativo; s'egli è maggiore, sarà positivo ec. 75.

PROPOSIZIONE XXXVI.

PROBLEMA VENTESIMOSETTIMO.

Innalzare un dato numero a qualunque grado di potenza col mezzo dei Logaritmi. 76.

Sia il dato numero 17, il quale si voglia innalzare al duodecimo grado di potenza. Si moltiplichi il Logaritmo di 17 per 12, e s'averà il Logaritmo della potenza duodecima di 17 per la natura dei Logaritmi.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Problema Ultimo.

77. *Estrarre qualunque radice da un numero dato col mezzo dei Logaritmi.*

Sia p. e. da estrarre la nona radice di 512. Cerco nelle Tavole il Logaritmo di questo numero dato, e lo divido per 9; il residuo sarà il Logaritmo della nona radice che si cercava; per quel che s'è detto al Capo primo di questa Sezione.



ELE-

ELEMENTI
DELLE
MATEMATICHE,
OVVERO
TRATATTO DELLA GRANDEZZA IN GENERALE.

LIBRO SETTIMO.

Del metodo di risolvere una Questione o Problema.

SEZIONE PRIMA.

CAP. I.

Vi sono due differenti metodi di risolvere una questione ovvero Problema ; uno è la Sintesi, *l'altro* l'Analisi. *Nell'Analisi si suppongono le cose tali quali deono essere, seconde che la questione è proposta. Come ciò si possa fare.*

CHiamasi *Questione* o *Problema* la proposizione, nella quale si cerca una verità ch' è ignota, ma che ha però qualche relazione a verità note. Siccome non 1.

 si

si cerca quel che si conosce, e in vano si cercherebbe quel che non si sa, se non se ne avesse qualche cognizione; così in un Problema tutto non è ignoto, e appunto da quel che si sa, si può imparare quel che non si sa: una prima cognizione servendo di grado per acquistarne delle altre. Sicchè bisogna far uso dell' uno, o dell' altro dei due metodi, che il seguente esempio farà conoscere.

Supponiamo, che un uomo voglia conoscere gli ordigni di un' Orologio, e che egli non ne abbia mai veduti di aperti e sciolti nelle sue parti. Se quest' Orologio fosse chiuso nella sua cassettina, e per conseguenza l' uomo non vedesse ciò che lo fa muovere; egli sarebbe disposto ad aprirlo e a disfarlo per vederne il di dentro; e così facendo egli seguirebbe il primo metodo. Ma se questo Orologio fosse disfatto, e tutte le sue parti fossero separate; allora egli desiderarebbe di trovare un artefice, che sapesse unirle assieme, e spiegargliene l' uso. Il primo di questi metodi chiamasi *Analisi*, cioè metodo di risoluzione, perchè scioglesi nelle sue parti la cosa che si vuol conoscere. Il secondo metodo chiamansi *Sintesi*, ovvero metodo di composizione, perchè s' uniscono le parti della cosa, che si esamina. Il primo disfà; il secondo compone: nulla di meno o coll' uno o coll' altro di questi metodi si può sciogliere una questione.

Non

Non bisogna attaccarsi scrupolosamente all' Etimologia delle parole, ma conviene osservare quel che nell' uso comune elle significano. Per *Sintesi* s'intende il metodo di risolvere una questione coi principj della scienza, da cui dipende la questione medesima. Siccome per risolvere i Teoremi ed i Problemi proposti nei primi sei Libri, avete veduto in ciaschedun Libro, che ci siamo serviti di ciò che avevamo precedentemente dimostrato, di modo che abbiamo composto come un corpo di dottrina, contenente tutte le principali verità, che contener dee un Trattato della grandezza in generale; così non è necessario parlare a lungo della Sintesi. Ella si chiama *Metodo di dottrina*, poich'è propria per insegnare. Un Maestro che sa le cose, non propone da principio al suo Discepolo, se non quelle che facili sono da comprendere, conducendolo poi per gradi di cognizione in cognizione, a misura che le verità da lui insegnate si sieguono una dietro l'altra, o che le une servono a far comprendere le altre; imperciocchè, come son' esse a lui tutte note, le può ordinare come gli piace. Così anch' io seguendo il metodo sintetico, ho ordinate tutte le parti di questo trattato, dopo di avere io stesso conosciuto ciò che disegnavo far capire agli altri. Lo stesso non è dell'Analisi. Non si pratica questa per far conoscere quel che si sa, ma per ritrovare quel che non si sa-

 peva,

peva, perciò chiamasi ella *metodo d'invenzione* ; ed a spiegare questo metodo ho destinato il Libro presente.

Questa parola *Analisi* si può tradurre in nostra lingua *Risoluzione* : ma non ci fermiamo a quel che significa questa parola; procuriamo d' averne (secondo il senso in cui questa parola oggi si prende) una nozione così chiara, sicchè noi possiamo dedurre da essa nozione quel che far si debba, quando si serviamo di tal metodo. Essendo dunque proposto un Problema : se tosto si suppone la cosa fatta com' ella essere dovea, e che da ciò ch' è conosciuto nel Problema si ricava la cognizione di quel che non si sapeva, ciò si chiama *Analisi*, ovvero *metodo d' invenzione*, perchè col suo mezzo si scopre e si giugne a conoscere ciò che non si conosceva per lo innanzi ; in vece che nella Sintesi non si può insegnare, cè per verità s' insegna agli altri che quel che di già si sa.

Quindi la nozione, che abbiamo data dell' Analisi, c' insegna che la prima cosa da farsi è di esprimere con chiarezza ciò ch' è proposto, affine di considerarlo attentamente ; imperciocchè dal supporre la cosa di cui si cerca, essere fatta in un talqual modo, si ha da dedurre tutto ciò che si vuol sapere. Per essere intesi, serviamoci di un'esempio. Si propone di scoprire l'età di tre persone.

La

La seconda è (dicesi) *più vecchia 5 anni della prima ; la terza ha il doppio d'anni della prima e della seconda, e l'età di tutte queste tre persone fanno assieme 75 anni.*

S' io chiamo x l'età della prima, quella della seconda sarà $x+5$; e poichè l'età della terza è doppia di quelle della prima e della seconda, dunque la sua età sara $4x+10$. Quindi le tre età possono essere espresse così $x . x+5 . 4x+10$. Ora esse sono eguali a 75; dunque $6x+15=75$: in tal modo il Problema è espresso tale qual' egli è proposto, sicchè da questa espressione facilmente si può dedurre la verità che si cerca, cioè l'età di ciascheduna.

C A P. II.

L' Analisi suppone le cose fatte come sono proposte nella questione ; e per mezzo di ciò che si conosce, ella uguaglia le grandezze ignote a quelle che sono note, lo che si dice ritrovare dell' Equazioni. Regole per far questo.

REGOLA PRIMA.

La *prima cosa che si dee fare, è conoscere assai distintamente lo stato della questione proposta*

loro ciò che non prendevano, e gittavano nell' acqua ciò che prendevano. Lo spirito essendo preoccupato dall' idea di Pescatori, che pescano pesce, non può concepire quel che si vuol dire; e tutta la difficoltà che v'è per risolver la questione, nasce dal non pensare, che i Cacciatori ed i Pescatori, e tutto il resto degli uomini cercano alcune volte nella loro vesti certi animalucci, che gittano via se li prendono, e se non possono prenderli, gli portano con loro. Onde nella Questione non era d' uopo parlare nè di Cacciatori nè di Pescatori.

Alcune volte poi non si mette in una questione tutto ciò ch' è necessario; come in questa. *Rendere immobile un' uomo senza legarlo; o piuttosto messo il dito piccolo di un' uomo nella di lui orecchia, renderlo con questa positura come immobile, in modo che non possa uscire dal luogo dove si sarà posto, sino a tanto non levi via il dito picciolo dalla sua orecchia.* La condizione che non si dice, è che si deve fare abbracciare un' albero a quello, il quale pone il suo dito picciolo nell' orecchia, in modo che quest' albero stia tra il suo braccio, e la sua orecchia. Posta questa condizione, non v'è più questione.

REGOLA III.

Quando si ha levato da una questione tutto ciò, che rendevala più imbarazzata, e che vi 4.

si

si hanno sostituite le condizioni necessarie che non erano espresse, di modo che si veda chiaramente quel che bisogna cercare; per solevar lo spirito in questa ricerca, conviene dare un nome a ciaschedun termine della questione, ed esprimerlo con un carattere sopra la carta.

Il che ferma l' immaginazione, ed impedisce che non s'imbroglimo, nè si scordiamo delle scoperte fatte. Così nella questione che s'è fatta qui sopra dell' età delle tre persone differenti, per fermare il mio spirito, chiamo *x* l'età del primo, *z* quella del secondo, *y* quella del terzo. Questi caratteri mi rendono più facile l' attenzione che debbo porre alla sopradetta questione; e quando avrò fatta qualche scoperta, la segnerò per non iscordarmene. P. E. conoscendo dal modo di proporre la questione sopradetta, che l' età del primo, chiamata *x*, è minore di 5 anni dell' età del secondo, ch' è segnata colla lettera *z*; scopro che *x* più 5 è eguale a *z*, ciò ch' io segno così $x+5=z$. E di poi continuo l'esame della questione, applicando tutto il mio spirito a ciascheduna cosa io particolare, senza curarmi di conservare nella mia memoria la prima scoperta, che ho già lasciata come in deposito sopra la carta.

REGOLA IV.

Nell' esprimere co' segni le grandezze le quali 5.
sono il soggetto della questione, bisogna distinguere con segni differenti quelle che sono note, da quelle che non le sono.

Se in una questione tutto fosse noto, non vi sarebbe questione, come già s'è detto. Non si pensa mai di dimandare seriamente qual' è la grandezza, ch' è metà di 24 ed eguale a 12. Per lo contrario, se tutto fosse ignoto, non vi sarebbe parimente questione. Se un uomo mi proponesse semplicemente di scoprire, qual numero egli ha pensato, senza dirmi di più; io gli risponderei, che non sono indivino. In una questione ragionevole v'è sempre qualche grandezza nota, la quale si truova meschiata con grandezze ignote. Pertanto queste differenti grandezze bisogna distinguere nella scrittura; lo che si può fare, segnando quelle che sono note colle prime lettere dell' alfabetto a, b, c, d, e servendosi delle ultime lettere x, y, z, per dinotare le ignote. Il che solleva anco l' immaginazione, e fa sensibilmente conoscere ciò, che in un problema conviene cercare; e per verità si cerca sempre il valore di x, o di y, ovvero di z.

Quando però in una proposta questione si parla di molte differenti spezie di grandezze, si

si può segnarle colle prime lettere del loro nome. Se si parla di Doppie, di Zecchini, di lire, di soldi ec. si potrebbe chiamare le Doppie *d*, i Zecchini *z*, le lire *l*, i soldi *f* ec. Tutto ciò serve mirabilmente a facilitare la risoluzione di un problema, sovvenindo l' immaginazione, senza l'ajuto della quale la maggior parte degli uomini nulla possono concepire. Oltre di che, ciò abbrevia il discorso, senza renderlo tuttavia oscuro; perchè questi segni sono semplici e facili da conoscere. Suppongo però, che questi segni si riducano ad un picciol numero; poichè altrimenti, ben lungi di rendere il discorso chiaro abbreviandolo, l' oscurerebbero (come l' esperienza lo può far conoscere) componendo un linguaggio nuovo, a cui non siamo accostumati.

REGOLA V.

6. *Quando una questione non è determinata da qualche grandezza particolare, di modo che molte grandezze possono avere le condizioni che si ricercano nella questione; allora bisogna supporre a descrizione qualche grandezza, la quale abbia le condizioni proposte, e determini in tal modo la questione.*

Se si proponesse in generale di trovare una grandezza, che fosse la sesta parte di un' al-

tra grandezza, uoa tal questione sarebbe indeterminata; imperciocchè si può trovare un numero infinito di differenti grandezze, che saranno la sesta parte di un' altra grandezza. Prendo p. e. 30, che divido per 6, e il quozieote di questa divisione ch' è 5, è la sesta parte di essa grandezza. Posso suporre uo'altra grandezza, p. e. 24, di cui la sesta parte è 4; sicchè questi due numeri 24 e 4 soddisfano alla questione, come fanno anche 30 e 5. Nelle questioni iodeterminate s'è duoque obbligato scegliere a descrizione una grandezza, che non è determinata; senza questo, come apparisce dagl'accennati esempj, non si possono risolvere tali questiooi.

REGOLA VI.

Bisogna corregere i nomi o l'espressioni delle grandezze, che fanno il soggetto della questione, e ridurle a' termini più semplici. 7.

Cioè, l'espressiooi, de'quali si fa uso, denno essere nette e brevi, affinchè minore sia la fatica a rappresentarcele, e quiodi si possa più facilmente terminare di risolvere la questione. In cambio dunque di $x+5+x+10$ si dee scrivere $3x+15$. Parimeoti, quaodo si ha delle frazioni, bisogna ridurle a' termini più semplici, e io luogo di $\frac{18}{24}$ scrivere $\frac{3}{4}$; e se si ha molte frazioni uoirle in una somma. Per conseguenza se $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ sono il valore di una grandezza data, bisogoa unire que-

queste due frazioni, e porre in loro luogo il suo valore $\frac{z}{e}$.

Per risparmiare la diversità dei segni, in luogo di due grandezze note bisogna porne una sola, che sia ad esse eguale. P. e. in vece di $ox + dx$, prendere e che sia eguale ad $o+d$, e scrivere ex. Nello stesso modo, se la grandezza data è $\frac{dx}{3}$, cioè il terzo di dx, prendo una grandezza da me chiamata f, che sia il terzo di d, e in cambio di $\frac{dx}{3}$ scrivo fx, imperciocchè (per la supposizione) fx è il terzo di dx. Così queste espressioni più semplici e meno imbarazzanti, rendono la questione più chiara.

REGOLA VII.

8. *Conoscendo i rapporti che sono tra i termini di uno questione, si conosce lo differenza che passa tra questi termini, e ciò che li rende ineguali; e con questo mezzo si può esprimerli in due modi, lo che dicesi fare* una equazione.

Per rimanere nella medesima questione delle tre età, già proposte di sopra; conoscendo che z supera x di 5, ovvero che la differenza di x e di z è 5, so dunque che $z-5=x$, o che $x+5=z$: e poichè y è doppio di x e di z, so ancora che $2x+2z$

sono

sono eguali a y. Sicchè posso esprimere queste grandezze in due modi, nominare $x+5$ la grandezza z, e $2x+2z$ la grandezza y, e questa doppia espressione si chiama *Equazione*. Avvertite, che a tenore di ciò che abbiamo detto nel Capo antecedente, ho supposta ogni cosa fatta, come la questione il richiede. Ho nominate le cose, come s'io le conoscessi, di poi ho considerato le loro differenze; ho, dico, scorse le difficoltà secondo l'ordine il più naturale, indicatomi dai loro rapporti, lo che mi ha fatto ritrovare il modo di esprimere una medesima grandezza in due maniere, che (come abbiamo veduto) si dice avere una *Equazione*: ho ritrovato che $x+5=z$, e $2x+2z=y$.

REGOLA VIII.

Conviene ritrovare tant' Equazioni, quante vi sono grandezze ignote, e fare in modo che nell' espressione del Problema vi sia una sola grandezza ignota. 9.

E' cosa evidente, che il fine di tutto ciò che si fa nell' esame di una questione, è di conoscere (se sia possibile) comparando le grandezze ignote con quelle che sono note, ciò che le rende ineguali; ovvero ciò che bisogna aggiungere o sottrarre, più o meno, affinchè divengano eguali. Perciò dopo avere esaminate tutte le condizioni di

un Problema, conviene ritrovare tante equazioni quante v'ha grandezze ignote; di maniera che vi rimanga una sola ignota, cioè di tutte le lettere che segnano le grandezze ignote non vi resti che una sola lettera ignota. P. e. nella Questione di sopra proposta; poichè so che $x+5$ è eguale a z ch'è la seconda età, non chiamo più questa seconda età z, ma $x+5$; e poichè la terza età y è doppia di x e di $x+5$, non nomino più la terza età y nè $2x+2z$, ma $2x+2x+10$; la qual' espressione $2x+2x+10$ corretta che sia, si riduce a questa $4x+10$; e le tre grandezze x, z, y riduconsi a quest' altre x, $x+5$, $4x+10$ le quali hanno una sola di quelle lettere che segnano le grandezze ignote, cioè x. Il che rende la Questione più semplice, riducendola alla ricerca di una sola grandezza ignota. Ma poichè la somma delle tre età $x+x+5+4x+10$ è eguale a 75, dunque dopo di avere corretta questa espressione, e di averla ridotta a $6x+15$ ch'è più semplice, ho questa Equazione $6x+15=75$, cioè una doppia espressione della medesima grandezza, perchè $6x+15$ e 75 hanno un medesimo valore. (a)

RE-

(a) Si dee qui avvertire, che delle molte Equazioni di un Problema, alcune ve ne sono che lo contengono in parte, ed una poi che comprende il Problema, cioè tutte le condizioni del medesimo. Così nell'accennato

REGOLA IX.

Quando le grandezze note e ignote si trovano mescolate assieme, bisogna separarle, e trasportare da una parte tutto ciò ch'è noto, e dall'altro ciò ch'è ignoto. 10.

Chiamasi *membro* di una Equazione ciò ch'è da una parte o ciò ch'è dall'altra del segno di eguaglianza; cioè $6x+15$ è il pri-

M a mo,

nato esempio, $x+5=z$ è una Equazione che contiene il Problema in parte, cioè la sola condizione, che la seconda età nominata z, è maggiore della prima chiamata x, di 5; e parimente $2x+2z$ ovvero $2x+2x+10=y$ è un'altra Equazione, che contiene il Problema parzialmente, cioè un'altra condizione soltanto. Ma l'ultima $x+x+5+4x+10$ ovvero $6x+15=75$ è quella Equazione, la quale tutte le condizioni del Problema comprende, e che dall'Autore a ragione è chiamata *Espressione del Problema*. Questa *Espressione* alcune volte contiene più di una ignota; e ciò succede, quando in un Problema si cercano maggior numero di grandezze, di quel che sia il numero delle condizioni date, cioè quando vi sono più ignote che condizioni è per conseguenza che Equazioni, le quali il Problema parzialmente contengono. P. e. se dato fosse questo Problema ritrovare tre numeri tali, che il primo sia quadruplo del secondo, e'l terzo eguale alla somma dei due altri. In esso tre sono le grandezze ignote che chiamo $x.\ z.\ y$, e due le condizioni, cioè $x=4z$ e $x+z$ ovvero $4z+z=5z=y$; e in quest'ultima, che comprende l'espressione del Problema, più di una ignota ritrovasi. Perciò in tali casi conviene determinare a piacere, e con certe restrizioni (come in progresso faremo vedere) tutte le ignote più di una, che sono comprese nell'ultima Equazione. 11

mo, 75 è il secondo membro di questa equazione $6x+15=75$. Ora quando in un dei membri dell'equazione la grandezza ignota si trova sola, e che nell' altro membro vi sono solamente grandezze note, egli è evidente, che quella grandezza non è più ignota. Se $x=10$, so che'l valore di x è 10. Per compiere dunque la questione, bisogna far passare in un dei membri tutto ciò ch'è noto, e nell'altro quel ch'è ignoto, in maniera che il rapporto della grandezza ignota colle grandezze note sia palese. P. e. in questa Equazione $6x+15=75$, la grandezza x ritrovandosi meschiata con $+15$, porto questa nota grandezza 15 dall'altra parte così $6x=75-15$, lo che si fa togliendo da cadaun membro la grandezza 15, senza turbare l'Equazione, per l'Assioma quinto del Lib. I.

REGOLA X.

11. *Bisogna ridurre ai più semplici termini quella ragione o rapporto di eguaglianza, ch'è tra i due membri dell' Equazione.*

Così in vece di $6x=75-15$, scrivo $6x=60$; imperciocchè $75-15$ è lo stesso che 60. Riduco ancora questa Equazione o rapporto $6x=60$ a' termini minori dividendo questi due termini $6x$ e 60 per la loro comune e maggior misura 6. Quella divisione dà x e 10, che sono ancora nella medesima ragione, poichè dividendo due grandez-

ze

ze per un medesimo divisore, conservano fra di loro la stessa ragione che per lo innanzi avevano. Perciò $x=10$, dopo di che si conosce sensibilmente la ragione dell' ignota x con ciò ch'è noto. Tutta la questione dunque è risolta; imperciocchè x valendo 10, e $x+5=z$, dunque $z=15$: e poichè $2x+2z=y$, dunque y val 50: Per conseguenza la prima età è 10, la seconda 15, la terza 50, e la somma di tutte tre è 75 anni.

Sicchè seguendo il metodo prescritto trovasi finalmente la risoluzione del Problema. Il che non succede già a caso, ma secondo un metodo giudizioso e naturale; e di ciò segno certo è, che se la questione non è solubile, se ne discopre l'impossibilità.

Un Problema è impossibile, o assolutamente, o per rapporto alle nostre cognizioni. 12.
Egli è impossibile assolutamente, quando contiene una contradizione, come questo: *Trovare un numero che sia il terzo di 12, ed eguale a 5*, il ch'è impossibile, perchè il terzo di 12 è 4. Onde si dimanda di ritrovare un numero, che sia nel medesimo tempo eguale a 4 e a 5; lo che contiene una contradizione. Ora seguendo il metodo prescritto, si conosce, se un Problema è assolutamente impossibile; imperciocchè in questo Problema avendo supposto il terzo di 12 chiamarsi x, ho l'equazione seguente $3x=12$; e poichè x è eguale a 5, bisogna che $3x=15$: ciò ch' è impossibile, perchè $3x=12$. Quindi co-

 no-

nosco, che le due condizioni, racchiuse in questo Problema, si combattono una coll' altra, e per conseguenza che il Problema è impossibile.

Noi conosciamo pure, se un Problema è impossibile riguardo alle nostre cognizioni, mentre se p. e. dopo aver seguite le regole precedenti non ho potuto ridurre un'equazione a' termini più semplici dei seguenti $xx = bb + ax$, scorgo bene, che non posso sapere, qual'è il valore di x, perchè non ho ancora Regole per conoscere il valore di una grandezza ignota com'è x, quando so solamente, che il suo quadrato xx è eguale al quadrato di una grandezza nota bb, più un piano fatto dell' ignota x e di un' altra nota a, cioè più il piano ax.

13. Se esaminando la difficoltà della questione nel modo che s'è detto, non si trova equazione o sieno esse in minor numero delle ignote, è un segno, che il Problema è indeterminato; e allora conviene supporre (come s'è detto) a descrizione grandezze tali, che possano soddisfare alla questione. (*a*)

CAP.

(*a*) Giovanni Pellio, Discepolo di Rhonio, è quello tra i Moderni, che seppe adequatamente distinguere i generi de' Problemi, sicchè col mezzo della di lui distinzione veniamo a conoscere che che pensare si debba di essi. Imperciocchè, se il numero delle condizioni è minore del numero delle grandezze ignote, il Problema è *indeterminato*, e perciò capace di infinite risoluzioni. Quando poi il numero dell' equazioni è egua-

CAP. III.

Come debbasi ridurre una Equazione ad una tal espressione, di modo che la grandezza ignota cercata, si trovi sola in uno de' due membri dell' Equazione.

L'Analisi consiste principalmente in dividere e tagliare una Equazione, di maniera ch'ella si riduca ad una espressione semplice; e che la grandezza ignota si liberi da ciò che impedisce, che non si possa vedere il suo rapporto colle grandezze note. P. e. in questa Equazione $5x-1=4x+6$ e aggiungendovi 1 da una parte e dall'altra, $5x=4x+7$, e levando $4x$ da una parte e dall'altra, si ha $x=7$, e vi sussiste il medesimo rapporto di eguaglianza; lo che ha fatto dare al metodo di cui parliamo, il nome di *Analisi*: parola Greca, che signi-

eguale al numero delle ignote, il Problema è *determinato*, e non ammette che un dato numero di risoluzioni. Se finalmente le condizioni o l'equazioni sono in maggior numero delle grandezze cercate, ed ignote; allora il Problema sarà *più che determinato*: anzi *impossibile*, quando le condizioni saranno contraditorie. I medesimi tre generi di Problemi considerò anche Proclo Geometra antico; e chiamò quei del primo sopranominato genere, *Problemi mancanti*, que' del secondo, *Problemi solmato*, e quei del terzo, *Problemi eccedenti*: i quali nominò *soprabbondanti*, se le condizioni superflue non ripugnano alle necessarie; *impossibili*, se v'è ripugnanza tra loro.

fica, *risolvere*, *tagliare*, *slegare*. Queste riduzioni si fanno aggiungendo o sottrando qualche cosa dai membri di una Equazione, moltiplicandoli o dividendoli, in modo che non si tolga l' eguaglianza ch'è fra di essi.

Delle Riduzioni che si fanno coll' addizione.

14\. *Se da una parte e dall' altra del segno di eguaglianza si aggiungono grandezze eguali, i membri dell' Equazione resteranno eguali, e l' equazione non sarà turbata.*

Se a due grandezze eguali se ne aggiungono di eguali, restano eguali fra di loro. Così se $x=15$ e che si aggiunga 5 da una parte e dall'altra, l'Equazione resta $x+5=20$. Per aggiungere basta concellare da un membro di una equazione, ciò che si trova col segno $-$, scrivendolo nell' altro col segno $+$ perchè allora egualmente si aggiunge all'uno e all'altro membro. Sia p. e. $x-50=6$; per aggiungere 50 da una parte e dall'altra, si cancelli 50 ch'è nel primo membro con $-$, e se lo ponga nell' altro membro con il segno $+$ in questo modo, $x=6+50$; il ch'è una espressione corretta ed abbreviata dell'addizione ch'io fo: perchè se $x-50=6$, è certo che $x-50+50=6+50$. Ora poichè $-50+50=0$, per fare l' addizione sopradetta in una maniera po-

polita, bisogna solamente scrivere $x = 6 + 50$, ovvero $x = 56$. Così se $a - z = 0$, per aggiungere z all'uno e all'altro membro, scrivo $a = 0 + z$, o semplicemente $a = z$, poichè zero io questo luogo non aumenta il valore di z. Parimente se si ha l'Equazione $a - 2x = 6 + x$, trasportando $- 2x$ nell'altro membro, e scrivendolo con $+$, si ha l'altra Equazione $a = 6 + x + 2x$, ovvero $a = 6 + 3x$.

Delle Riduzioni che si fanno colla Sottrazione.

Se da una parte e dall' altra del segno di eguagliauza si sottraggono grandezze eguali, l'Equazione non è turbata. 15.

Da cose eguali levando cose eguali, restano esse eguali. Sicchè se $x + 5 = 20$, togliendo 5 da una parte e dall' altra, l'Equazione resta $x = 15$. Se $a = 6 + 3x$, levando 6 da una parte e dall'altra, resta $a - 6 = 3x$. Alcune volte per fare una tal sottrazione, basta cancellare da un membro ciò che vi si trova con segno $+$, e scriverlo nell' altro col segno $-$; imperciocchè ciò facendo, si abbrevia l'operazione, e si sottrae egualmente dall'uno e dall'altro membro dell' Equazione. P. e. se $x + 50 = 80$, è evidente, che $x + 50 - 50 = 80 - 50$; Ora poichè $+ 50 - 50 = 0$, per sottrarre 50 da una parte e dall' altra, basta scrivere $x = 80 - 50$, ovvero $x = 30$.

Del-

Delle Riduzioni che si fanno colla Moltiplicazione.

16. *Quando si moltiplicano i due membri di una Equazione per un medesimo moltiplicatore, non si turba l' Equazione.*

Moltiplicando i due termini di una ragione per una medesima grandezza, li prodotti sono nella stessa ragione che le grandezze moltiplicate. Quindi se si moltiplica i due membri di questa Equazione $\frac{z}{a} = b$, per a, si averà quest' altra Equazione $z = ab$; e poichè la ragione di $\frac{z}{a}$ con b è una ragione di eguaglianza, la ragione di z con ab ch' è la medesima, sarà ancora una ragione di eguaglianza. Così se $\frac{x}{3} = 6$, moltiplicando l' uno e l' altro membro per 3, si avrà $x = 18$.

Se $\frac{zz}{z-b} = a$, poichè cancellando il denominatore $z-b$ del primo membro, questo membro si considera come moltiplicato per $z-b$, moltiplicando a per $z-b$, s' averà questa riduzione $zz = az - ab$. Similmente se $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$ per moltiplicare questi due membri per a, cancello a dal primo, e mol-

e moltiplico le parti del secondo per a; ed ho $zz = \frac{azz - abz + abb}{z}$. Moltiplicando questa Equazione così ridotta per z, si ha quest' altra equazione ancora più semplice $z^3 = azz - abz + abb$ secondo lo stesso principio, che a moltiplicare une frazione per il suo denominatore, basta cancellare il denominatore medesimo.

Da ciò si conosce, che per deliberare una Equazione dalle frazioni, quand'ella ne ha, non v'è d'uopo che moltiplicarla per il denominatore della frazione; e se v'ha delle frazioni in tutti due i membri dell'Equazione, bisogna fare la medesima cosa, che io fo qui $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$, moltiplico 1°. l'uno e l'altro membro per a, ciò che mi dà per prodotto $zz = \frac{azz - abz + abb}{z}$. 2°. Moltiplico l'uno e l'altro membro per z, ed ho $z^3 = azz - abz + abb$, dopo di che non vi sono più frazioni.

Delle Riduzioni che si fanno colla Divisione.

Quando si dividono i due membri di una Equazione per la medesima grandezza, l'Equazione rimane. 17.

Se si dividono due termini di una ragione

per

per una ſteſſa grandezza, i quozienti di queſta diviſione ſono nella medeſima ragione che i due termini diviſi. Se $zz = 4z$, dividendo i due membri per z, s'avrà $z = 4$. Se $x^4 = ax^3 + bbx^2$, dividendo queſt'equazione per x^2, ſi avrà $x^2 = ax + bb$. Nello ſteſſo modo ſe $3z = 12$ dividendo per 3, verrà $z = 4$. Se $az = ab$ dividendo per a, s'avrà $z = b$. La ſeguente Equazione

$$azz + bzz = abz + bbz - ab^2 - b^3$$

potendo eſſere diviſa per $a + b$, ſi riduce con una tal diviſione a queſta $zz = bz - b^2$.

Qui conviene farſi ſovvenire le Regole, che nel Lib. I. num. 39. abbiamo date per dividere le grandezze che ſi ſegnano con lettere.

Delle Riduzioni che ſi fanno colla eſtrazione delle Radici.

18. *Eſtraendo le radici da ciaſchedun membro di una Equazione, non ſi turba l'Equazione medeſima.*

La preſente Regola è fondata ſopra queſto principio, che le potenze eguali hanno radici eguali. Se dunque $xx = 25$, prendendo le radici di xx e di 25 biſogna, che x radice di xx e 5 radice di 25 ſieno eguali, cioè $x = 5$; dove voi vedete, che s'abbaſſa la potenza xx di un grado. Così se $z^3 = 125$, avendo eſtratta la radice cubica dall'uno e dall'altro membro, s'avrà $z = 5$; e parimenti eſtraendo la radice quadrata da

una

una parte e dall' altra in questa equazione $zz=aa+2ab+bb$, rimarrà $z=a+b$. (*a*)

Delle

(*a*) Qui fa d' uopo di non lasciare da parte, che alcune volte aggiungendo all' uno e all' altro membro una certa grandezza, ponesi l' Equazione in istato di essere ridotta colla estrazione delle radici. P. e. se all' equaziond $x^2+2ax=b^2$, aggiungesi dall' una e dall' altra parte a^2, averemo $x^2+2ax+a^2=b^2+a^2$, la quale colla estrazione della radice quadrata si riduce a $x+a=\sqrt{b^2+a^2}$, ovvero $x=\sqrt{b^2+a^2}-a$. E parimenti l' Equazione $x^4+2a^2x^2=3a^4$, sarà ridotta, se 1°. si aggiungerà a^4 all' uno e all' altro membro, che darà $x^4+2a^2x^2+a^4=4a^4$; e 2°. si estrrà la radice quadrata dall' uno e dall' altro membro, così $x^2+a^2=2a^2$ ovvero $x^2=a^2$, la qual Equazione con una nuova estrazione di radice si riduce ad $x=a$, ma ciò è piuttosto una risoluzione che riduzione delle Equazioni.

Di queste risoluzioni parleremo lungamente a suo luogo. Per ora basti dire, che quando l' incognita ascende al secondo grado, conviene usare l' artifizio, che nel seguente esempio sarà indicato. Sia l' Equazione di due dimensioni $x^2-ax=ab$; si faccia il quadrato della metà di a, grandezza nota per cui l' ignota x è moltiplicata; e lo si aggiunga all' uno e all' altro membro della Equazione, così $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=ab+\frac{a^2}{4}$. Si Estragga da una parte e dall' altra la radice quadrata, e si averà $x-\frac{a}{2}=\sqrt{ab+\frac{aa}{4}}$, perciò $x=\frac{a}{2}+\sqrt{ab+\frac{aa}{4}}$.

Delle Riduzioni che si fanno innalzando una potenza ad un più alto grado.

19. *Innalzando ciascheduno membro di una Equazione ad un più alto e medesimo grado, non si turba l'Equazione.*

Imperciocchè, siccome le radici di grandezze eguali sono eguali, così le grandezze che si considerano come radici, restano eguali fra di loro, s'elle s'innalzano ad un medesimo grado: lo che è molto utile per liberarsi dalle grandezze incommensurabili; imperciocchè se si ha questa Equazione $\sqrt{z}=5$ innalzando queste due grandezze ad un medesimo grado, cioè prendendo il quadrato di $\sqrt{z}$, ch'è z, e quello di 5 ch'è 25, riducesi l'Equazione $\sqrt{z}=5$ a questa $z=25$. Essendo chiaro, che per quadrare una grandezza che ha il segno radicale, basta levargli il segno stesso; così il quadrato di $\sqrt{xx}$ è xx, e quello di $\sqrt{xx+yy}$ è $xx+yy$. (*a*)

Delle

(*a*) Bisogna notare, che se uno dei membri dell' Equazione è composto di molte grandezze, de' quali alcune sieno sotto il segno radicale, ed altre no; allora conviene fare rimaner sola in uno dei membri dell' Equazione la grandezza sotto il segno, poi operare come s' è detto di sopra. P. e. sia data l' equazione $\sqrt{bd}+ad=ae$: si trasporti ad da quest'altra parte e s'averà $\sqrt{bd}=ae-ad$, s' innalzi poi al quadrato l' uno e l' altro membro ed allora l' Equazione sarà ridotta a questa $bd=a^2c^2-2a^2cd+a^2d^2$.

Delle Riduzioni che si fanno colla Sostituzione.

20. Non bisogna tralasciar di considerare la riduzione che si fa colla Sostituzione; cioè col porre in luogo di una grandezza ignota e incomoda qualche altra grandezza nota, e che faciliti la risoluzione di un Problema. S'è già veduto degli esempj nella questione delle tre età, in cui in vece delle grandezze z e y, s'è posto $x+5$ per z, e $4x+10$ per y.

Riduzioni colla trasposizione.

21. Si può ridurre una Equazione, in maniera che la grandezza ignota si trovi sola da una parte; lo che si fa col trasporre le grandezze 1°. Coll'addizione o colla sottrazione. Imperciocchè p. e. se data sia l'Equazione $x-a=b$; si può trasportare a, affinchè x sia solo, aggiungendo a da una parte e dall'altra: Così $x=b+a$. Se la grandezza a fosse stata unita ad x col segno $+$, s'avrebbe dovuto togliere a da una parte e dall'altra, ed allora averebbesi avuto $x=b-a$. Si fa ancora la trasposizione col mezzo della moltiplicazione e della divisione, e si libera una grandezza con cui trovasi mescbiata. Sia p. e. l'Equazione $\frac{x}{3}=b$, per levare 3 dal pri-

mo membro, moltiplico $\frac{x}{3}$ e b per 3, il che mi dà questa Equazione $x = 3b$, nella quale x è sciolta da ogni altra grandezza. Se la data Equazione fosse $3x = b$, dividendo i membri della medesima per 3, se la ridurrebbe a $x = \frac{b}{3}$, in cui x si ritrova solo, e 3 è trasportato dall'altra parte.

Queste Riduzioni cambiano talmente una Equazione, sicchè di poi non si scorge nè l'origine, nè il progresso, se non si fanno le operazioni da noi medesimi. Dal che nasce la difficoltà d'intendere i Libri d'Algebra; perchè in essi la maggior parte di queste operazioni vengono supposte. Vediamo il seguente Esempio.

Sia l'Equazione $\frac{\sqrt{zz+3aa}}{4} + \frac{zz-3aa}{4} = \frac{\sqrt{azz}}{b}$. I quadrati di grandezze eguali, essendo eguali, se si quadrano i membri di questa Equazione (il che si fa levando i segni radicali) ella resta $\frac{zz+3aa}{4} + \frac{zz-3aa}{4} = \frac{azz}{b}$: ma $+\frac{3a}{4} - \frac{3a}{4} = 0$; cancello dunque questi due termini per rendere l'espressione più netta; e poichè $\frac{zz}{4} + \frac{zz}{4} = \frac{zz}{2}$, ridu-

co l'Equazione proposta a questa $\frac{zz}{2} = \frac{azz}{b}$; il che è molto differente della prima sua espressione.

C a p. IV.

Principj dell'Equazioni, ovvero modi per trovare doppie espressioni, che facilitino la risoluzione di un Problema.

22.

TUtte queste riduzioni, de' quali noi abbiamo parlato suppongono, che siansi trovate dell' Equazioni, cioè delle doppie espressioni di quelle grandezze delle quali si cerca il valore, e le quali la sola maniera di esprimere un Problema fa conoscere. P. e. se si propone, che z sia tre volte più grande di x, concludo che tre volte x è eguale a z, sicchè z si può chiamare $3x$; ed ho una doppia espressione di una medesima grandezza, e per conseguenza la seguente Equazione $z = 3x$. Anche coi rapporri che hanno tra loro le grandezze che formano i termini di una questione, si ritrovano l'Equazioni. Ora ogni rapporto, come abbiamo veduto, è o differenza o ragione; onde per eguagliare le grandezze, de' quali si conoscono li rapporti, e per esprimerle in due modi, bisogna considerare le loro differen-

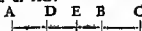
ze, ovvero le ragioni che hanno effe tra loro.

La differenza di due grandezze è l'eccesfo della più grande sopra la più picciola, o il difetto della più picciola sotto della più grande. Perciò aggiungendo effa differenza alla più picciola, questa si eguaglia alla più grande, e sottraendo la differenza stessa dalla più grande, la più grande si eguaglia alla più picciola. P. e. se la differenza di x da z è 10, e x sia più picciolo di z, dunque $x+10=z$, ovvero $z-10=x$, lo che mi dà doppie espressioni delle grandezze x e z. Posso chiamare $x+10$ la grandezza z, e $z-10$ la grandezza x, secondo che o l'una o l'altra espressione mi sarà più comoda; e così in luogo dell'una sostituir l'altra, di maniera che non abbia che una sola lettera ignota.

In una grandezza composta di due parti, la differenza di essa grandezza da una delle sue parti è l'altra parte. P. e. se a e b sono le parti di z; la differenza di z da a è b, e la sua differenza da b è a; cioè $z-a=b$, e $z-b=a$. Così in una proporzione aritmetica, gli estremi sommati assieme eguagliandosi all'addizione de' medj; se $\div a. b. c. d.$ dunque $a+d=b+c$.

23. La metà della somma di due grandezze disuguali, più la metà della differenza di queste grandezze, è eguale alla grandezza maggiore, e meno la metà della differenza è egua-

eguale alla più picciola. P. esemp. sieno le due linee AB, BC unite assieme, la loro differenza DB, e le linee AE, EC le due metà di AC.



Egli è evidente, che CE meno BE, metà della differenza delle due linee date, è eguale a BC, linea più picciola; ed AE più DE ovvero EB, metà della medesima differenza, è eguale ad AB: sia dunque AC eguale a $2x$, ed AB eguale ad y e $BC = z$, la loro differenza DB sia 12; dunque $x + 6 = y$ e $x - 6 = z$. Sicchè si può chiamare $x + 6$ la grandezza y, e $x - 6$ la grandezza z, e con questo mezzo si dà loro in certo modo lo stesso nome, lo che è di grandissima utilità, come vedrassi in progresso.

Quando si conosce, qual'è la ragione di due grandezze tra loro, se le può eguagliar facilmente; imperciocchè è chiaro, che se x è il terzo di z, bisogna che x preso tre volte sia eguale a z, come abbiamo detto, e perciò $3x = z$, ovvero $\frac{1}{3}z = x$. Se m è ad n come 2 a 3, dunque $m = \frac{2}{3}n$, ovvero $3m = 2n$.

Poichè in una progressione Geometrica, il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medj, se $\div\div a . b . c . d$. dunque $ad = bc$ e $ac = bb$ e $\frac{bc}{a} = d$; onde si può dalla cognizione che si ha della ragione che hanno

tra loro le grandezze, trarre dei modi facili di eguagliare, ovvero di fare dell' Equazione, ch' è lo stesso.

Quando si sa, che il quadrato di una grandezza ignota è eguale ad una nota, non fa d'uopo che innalzar la ignota di un grado. So p. e. che il quadrato di x è eguale a d, dunque $xx = d$: per lo contrario, se so, che la radice di x è eguale a d, concludo dunque $x = dd$.

Una cosa che non si può mai dire abbastanza si è, che il successo della fatica che si fa a risolvere un Problema, dipende spessissimo dall' espressioni felici, delle quali si fa uso, dando alle grandezze di una questione segni convenienti, o ponendo il tutto per le sue parti, o tutte le parti per lo tutto, distinguendo il tutto in tante e tante parti, secondo che il numero scelto sarà più comodo; il che si vedrà nelle risoluzioni de' seguenti Problemi. (*a*)

Cap.

(*a*) Questo metodo insegnato dall' Autore, per ritrovare doppie espressioni che facilitano la risoluzione di un Problema, è ciò che da alcuni altri dicesi *metodo di fare svanir l' ignota*. Con esso si perviene alla Equazione, che una sola ignota comprende, e che contenendo tutte le condizioni del problema, *espressione del Problema* è chiamata s. Reg. ottava.

Non s'è però parlato che di fare svanire le ignote lineari, cioè che ascendono ad un sol grado: ma siccome alla intelligenza del L. VIII. necessario è saper fare svanire le ignote che a qualunque grado ascendono, così di ciò (il luogo qui richiedendolo) qualche cosa ora diremo.

Se

Se p. e. nel risolvere un Problema si perviene a queste due Equazioni $ay = xy + xx$, e $ay^2 + c^2y = x^3$, e si voglia fare svanire y: si operi nel modo seguente.

Nella prima Equazione $ay = xy + xx$, dunque colla sottrazione $ay - xy = xx$; e dividendo per $a - x$, si averà $y = \frac{xx}{a-x}$. Si sostituisca il valore di y nella seconda Equazione $ay^2 + c^2y = x^3$, ed ella sarà ridotta ad $\frac{ax^4}{a-x} + \frac{c^2x^2}{a-x} = x^3$, in cui y più non apparisce.

Parimente se dalle due Equazioni $x^4 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$, e $x^2 + ay = y^2$, si voglia fare svanire x, si faccia così. Si moltiplichi la seconda Equazione per x^2, e si averà $x^4 + ayx^2 = y^2x^2$, e trasportando ayx^2 nel secondo membro, $x^4 = y^2x^2 - ayx^2$. Questo valore di x^4 si sostituisca nella prima Equazione, ed allora si avrà $y^2x^2 - ayx^2 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$, che resta eguale ad $x^3 - yx^2 = y^3$, in cui la maggiore potenza di x è x^3. Ora si moltiplichi la seconda equazione per x, e avérassi $x^3 + ayx = y^2x$, perciò $x^3 = y^2x - ayx$, il qual valore di x^3 sostituito nell' equazione $x^3 - yx^2 = y^3$, darà questa equazione $y^2x - ayx - yx^2 = y^3$ ovvero $yx - ax - x^2 = y^2$.

Ma in questa ultima equazione l'ignota x è innalzata al secondo grado solamente, perciò pongasi in suo luogo il valore di x^2, che si può rilevare dalla seconda delle due equazioni date, cioè $x^2 + ay = y^2$, e $x^2 = y^2 - ay$: allora averemo $yx - ax - y^2 + ay = y^2$, e ridotta $yx - ax = 2y^2 - ay$, cioè $x = \frac{2y^2 - ay}{y - a}$: sostituito poi questo valore di x o nella prima o nella seconda delle due equazioni date, si averà un'equazione in cui x più non vedrassi.

Questo metodo è molto laborioso, massime quando l'ignote da far svanire ascendo a gradi maggiori; sicchè a suo luogo parleremo di un'altro metodo inventato da Mr. Newton, il quale è molto più spedito nella pra-

C a p. V.

Applicazione di quanto s'è detto sopra l'Analisi, a' Problemi particolari. Come si risolvono i Problemi col metodo antico per le Regole di due false posizioni; si parla anco della Regola di Mistione.

Benchè tutto quel che s'è detto sia intelligibile, non ostante rendiamolo più chiaro, e più sensibile, facendo di tutto ciò un' applicazione ad alcuni Problemi.

PROBLEMA.

24. *Una persona avendo incontrato dei poveri, ed avendo voluto dare a ciascheduno cinque soldi, trovò che per far questo aveva un soldo di meno; non avendo poi dato a ciascheduno che quattro soldi, gliene sono restati 6. Quanti poveri v'erano, e quanti soldi aveva questa persona?*

Bisogna dedurre la risoluzione di questo Problema dal Problema medesimo, cioè dedurre la cognizione di quel che non si sa, dal solo modo con cui egli è proposto. Pertanto 1°. Bisogna esprimere in carta la cosa di cui si tratta, supponendola fatta come il Problema lo dice; dandogli perciò un nome. Chiamo dunque x il numero dei poveri che non mi è noto, e z quel-

quello del denaro che ha questa persona, lo che pure non m'è noto.

Considero i rapporti, che le grandezze ignote x e z hanno assieme, affine che io possa rappresentar la cosa come si suppone ch'ella sia. E poichè questa persona avendo voluto dare a ciascheduno povero cinque soldi, ne aveva per far ciò uno di meno, dunque cinque volte il numero de' poveri meno un soldo, cioè $5x-1$ è eguale al numero de soldi che aveva questa persona, cioè eguale a z. Così il rapporto di x e di z mi fa trovare questa doppia espressione o equazione $5x-1=z$.

Bisogna, come s' è detto, fare in modo che in una questione non vi sia che una grandezza nota, e per far ciò, trovare tant' equazioni, quante grandezze ignote vi sono nella questione. Cerco dunque un' altra doppia espressione, considerando gli altri rapporti che possono avere queste due grandezze x e z, secondo che la questione è proposta. E poichè questa persona dando 4 soldi a ciascheduno povero, ne ha 6 di residuo; dunque moltiplicando x, numero dei poveri, per 4 (il che fa $4x$) e aggiungendovi sei soldi, si fa una grandezza eguale a z, cioè ai suoi denari, $4x+6=z$.

Ora poichè $5x-1=z$, e che $z=4x+6$; dunque $5x-1=4x+6$, nella qual' ultima equazione non v'è che x ignota. Ma bisogna ancora procurare che x si trovi da una par-

te, liberato da ogni altra grandezza, e che sia precisamente eguale ad una grandezza nota. Fo dunque questa riduzione. 1°. aggiungendo 1 da una parte e dall' altra dell' equazione, lo che fa $5x=4x+7$. 2°. togliendo $4x$ dall' uno e dall' altro membro, dopo di che resta $x=7$; per conseguenza x, ch'è il numero dei poveri, val 7. V' erano dunque sette poveri. Ora $4x+6=z$, cioè quattro volte 7 più 6, ovvero 28 più 6 sono eguali a z: dunque $z=34$; e questa persona aveva 34 soldi.

Facciamo ancora l'applicazione delle regole analitiche alla questione seguente, ma senza tante parole.

25. *Alessandro era due anni più vecchio di Efestione, Clito aveva quattro anni più della somma delle età di Alessandro e di Efestione, e le loro tre età facevano 96 anni.*

Si dimanda qual'era l'età di ciascheduno.

L'età di Efestione sia chiamata x, quella di Alessandro z, e quella di Clito y. Poichè Efestione ha due anni meno di Alessandro, dunque $x+2=z$: e poichè Clito aveva tanti anni quanti tutti e due assieme, e quattro anni di più; dunque $x+z+4=y$. In luogo di z posso sostituire il suo eguale $x+2$, perciò $x+x+2+4=y$, la qual'equazione essendo corretta, $2x+6=y$. Le tre età ignote x. y. z. possono dunque esprimersi in modo che vi sia una sola ignota, così x. $x+2$ $2x+6$. Ora queste tre età ridotte in una somma

ma ch'è $4x+8$, fanno 96, secondo che la questione è proposta; dunque si ha l'Equazione seguente $4x+8=96$. Bisogna far passare quel ch'è noto, da una parte, levando via 8 da una parte e dall'altra, ed ho $4x=88$, e per liberare l'ignota x dalla cifra 4, divido l'uno e l'altro membro per 4, dopo di che ho $x=22$: dunque l'età di Efestione è 22 anni, quella di Alessandro che ha due anni di più, 24 anni, e per conseguenza quella di Clito 50.

Della Regola di due false posizioni.

26. Nell'Aritmetica ordinaria per risolvere i Problemi che abbiamo proposto, si suppongono dei numeri, i quali abbiano alcune condizioni, che appartengano ai numeri ignoti che si cercano. Si fanno due supposizioni di numeri, chiamate false, perchè in fatti i numeri supposti non sono i veri numeri che si cercano, ancorchè questi col mezzo di quelli si trovano. Per mostrare come ciò si fa, voglio risolvere l'ultimo Problema con questa Regola. Suppongo alcuni numeri, che abbiano le condizioni espresse nella questione; dopo unisco questi numeri in una somma, ed osservo qual'è la differenza tra essi e il numero 96, ch'è la somma nota delle tre età. Questa differenza si esprime co' segni $+-$. Suppongo dunque, che l'età di Efestione sia 16 anni, sicchè quella di Alessandro

ſandro ſarà 18, e quella di Clito 38. Ora $16+18+38$ non fanno 96, biſognandovene ancora 24; per conſeguenza i numeri che abbiamo ſuppoſti, non ſono i veri: nulla di meno però gli ſcrivo $16+18+38=96-24$. Fo una ſeconda ſuppoſizione, che l' età di Efeſtione ſia 21, e perciò quella di Aleſſandro 23, e quella di Clito 48. Ora $21+23+48=96-4$; dunque queſta ſeconda ſuppoſizione è ancora falſa. Per ritrovare i numeri veri, biſogna fare ſvanire le differenze -24 -4, affinchè ſi trovino da una parte tre numeri, che oltre queſta prima condizione dei numeri ſuppoſti, eſpreſſa nel Problema, abbiano anco la ſeconda; cioè che trovinſi preciſamente eguali a 96. Ecco il fondamento della Regola.

Si può fare ſvanire da una Equazione una grandezza imbarazzante; 1°. ſommando queſta Equazione con un' altra, nella quale ſi trovi la ſteſſa grandezza con un ſegno contrario. P. e. ſe $x=d-6$, e $z=d+6$; per fare ſvanire il numero 6, ſommo queſte due Equazioni, e dopo averle corrette, ritrovo $x+z=2d$, dove 6 più non compariſce; perchè -6 con $+6$ fa zero. 2°. Se in tutte due l' Equazioni ritrovaſi la medeſima grandezza col medeſimo ſegno $-$ ovvero $+$, biſogna ſottrarre una di queſte Equazioni dall' altra. Per eſempio, ſe $x=d-6$, e $z=b-6$, ſottraggo l' una dall' altra, e 'l reſiduo $x-z=d-b$, nella qual' Equazione 6 più non ſi vede;

de; imperciocchè quando si sottrae $b-6$ da $d-6$, ovverò $b+6$ da $d+6$, abbreviando l'operazione, il residuo è $d-b$. 3°. Se finalmente due Equazioni non hanno una medesima grandezza, la quale si possa di poi fare svanire sommando o sottrando come s'è detto di sopra, bisogna moltiplicare reciprocamente i membri dell' una per la grandezza, che si trova nell'altra Equazione, in questo modo. Sieno le due Equazioni $x=c-2$, e $z=d-6$, moltiplico i membri della prima per 6, e quelli della seconda per 2; lo che mi dà le seguenti Equazioni $6x=6c-12$, e $2z=2d-12$, nelle quali si trova la grandezza medesima 12 col medesimo segno, cioè —. Sottrando dunque una di quest'Equazioni dall' altra, avrò $6x-2z=6c-2d$, in cui 12 più non apparisce.

Secondo questi principj, per risolvere la questione delle età di Alessandro, di Efestione e di Clito; cioè per risolvere queste due equazioni $16+18+38=96-24$, e $21+23+48=96-4$, bisogna moltiplicare la prima equazione per la differenza della seconda supposizione ch'è 4 cioè $16+18+38=96-24$ per 4, il che dà l'equazione seguente $64+72+152=384-96$, e moltiplicare la seconda equazione per 24, ch' è la differenza della prima supposizione, cioè $21+23+48=96-4$ per 24, lo che dà $504+552+1152=2304-96$. 2°. Bisogna sottrarre la Equazione minore dalla maggiore, e resterà 440

+480

$+480+1000=1920$, nel qual residuo -96 e -96 più non compariscono, così questa differenza è svanita, come fi desiderava. Ora poichè 96 era 24 in 2304, prodotto di 96 moltiplicato per 24, e ch'egli era 4 volte in 384, prodotto di 96 moltiplicato per 4; avendo levato via 384 da 2304, bisogna che nel residuo 1920 ei sia 24 volte meno 4 volte, cioè 20 volte. Sicchè per ridurre l'ultima equazione a' termini più semplici, bisogna dividerla per la maggiore differenza 24 meno la minore ch'è 4, cioè per 20. Dopo questa divisione per 20, s'ha l'equazione $22+24+50=96$, la quale mi fa conoscere, che l'età di Efestione è 22, quella di Alessandro 24, e quella di Clito 50. Se le differenze delle due supposizioni fossero state $+4$, e $+24$, in vece di -4 e -24; in tal caso dopo avere moltiplicata ciascheduna supposizione per la differenze dell' altra supposizione, in luogo di sottrarre l'una dall' altra, avrebbe bisognato sommarle; lo ch'è di già chiaro per quel che s'è detto di sopra.

Noi avevamo risoluto il medesimo Problema in due tratti di penna; nè ho proposto quest' ultimo metodo che per far conoscere la Regola di due false posizioni, che s' insegna ne' Libri di Aritmetica ordinaria. (*a*)

(*a*) Si noti, che ne' detti Libri la Regola di una falsa posizione viene usata, quando le ignote dei Problemi sono tra loro in ragione geometrica, cusi la

Ra-

Della Regola di mistione.

Quando la mescolanza di molte cose che 27. hanno natura differente è fatta, facilmente si conosce il valore di ciascheduna parte della massa composta da questa mistione, se noto sia il prezzo di cadauna delle cose mescolate. P.e. un Mercante ha posto in una Botte che tiene 300 libbre, 100 libbre di vino da 5 soldi, 100 altre da 3 soldi, e 100 altre da 10 soldi alla libbra. Queste 300 libre così meschiate le une colle altre vagliono 90 lire ovvero 1800 soldi; si dimanda quanto dee valere ciascheduna di esse dopo la mescolanza. La trecentesima parte di 90 lire ovvero di 1800 soldi, ch'è sei soldi. Perciò se non si proponesse che di trovare il prezzo di ciascheduna libbra del vino, ch' è mescolato, la questione sarebbe facile.

Ma quando la mistione non è ancora fatta, e che vi si assegna un certo prezzo medio, riguardo il quale bisogna mescolare due o più cose differenti di prezzo, v'ha maggiore difficoltà. La Regola che si dà per fare questa mistione, non è molto differente dalla Regola di due false posizioni. Tutto l'artificio consiste a trovare quante volte bisogna prendere ciascheduna cosa data

per

Regola di due false posizioni, quando le ignote sono tra loro in ragione Aritmetica: lo che chiaramente apparisce dagli Esempj sopra n. 26. e L. III. n.

per mescolarsi l'una coll' altra, affinchè la mistura computata col prezzo medio, vaglia lo stesso che la somma dei misti calcolati col loro respettivo prezzo. Il che meglio si comprenderà con un'esempio.

Viene ordinato ad un Mercante di vendere il suo vino soldi 6 alla libbra; il Mercante non ha che due sorti di vino, la prima che chiamo x val 3 soldi alla libbra, e la seconda che nomino z ne val 8. Affinchè egli non perda, bisogna che mescoli queste due sorta di vino, in modo che un certo numero di libbre di vino ch'egli averà mescolato, vaglia precisamente in ragione di sei soldi alla libbra, il quale prezzo medio nomino a. Bisogna segnare il rapporto di x con a, e quello di z con lo stesso a; lo che dà queste due Equazioni $x = a - 3$, e $z = a + 2$. secondo la Regola di mistione, 1°. Bisogna moltiplicare la prima equazione per 2, ch' è la differenza della seconda equazione, lo che darà questa equazione $2x = 2a - 6$: e la seconda equazione per 3, ch' è la differenza della prima equazione, ciò che dà $3z = 3a + 6$. 2°. Bisogna unire queste due così ridotte equazioni in una somma il che fa $2x + 3z = 5a$. E questa equazione mi fa conoscere, che due libbre di vino da 3 soldi meschiate con tre libbre di vino da 8 soldi fanno 5 libbre di vino, che vagliono 6 soldi l'una. Cosicchè se il Mercante per fare una tal mescolanza, pren-

de

de due libbre di vino da 3 soldi, bisogna poi che ne prenda tre libbre da 8 soldi per non ingannare veruno, nè ingannare se stesso.

Voi vedete, che questa Regola ha i medesimi fondamenti che la regola di due false posizioni. Per fare svanire le differenze -2 e $+3$, si moltiplica l'una delle due Equazioni per la differenza dell'altra; e poichè queste differenze hanno segni contrarj, le equazioni si uniscono in una somma, dopo la quale addizione svanisconò le differenze, come s'è detto.

Quando si vuol meschiare molte grandezze differenti per costruire una mezzana grandezza, bisogna fare la mistione in molte volte. P. e. si vuole mischiare x di vino da soldi 2 la libbra, z di quello da soldi 4, e y da soldi 10 per fare una mistura a che vaglia soldi 6 alla libbra.

Meschio primieramente x con y.

$x=a-4$, e $y=a+4$. Moltiplico la prima Equazione per 4, e la seconda parimente per 4, lo che fa $4x=4a-16$, e $4y=4a+16$. Si unisca queste due equazioni in una somma, e s'averà $4x+4y=8a$. Quindi so, che bisogna porre assieme 4 libbre di vino da 2 soldi, e 4 libbre di quel da 10, e si averanno 8 libbre in tal modo mescolate, che vagliono soldi 6 alla libbra.

Dopo di ciò meschio z con y

Ora secondo i rapporti, da me per la questione

ne conoſciuti, che z ed y hanno con a, ritrovo queſte due Equazioni $z = a - 2$, e $y = a + 4$. Moltiplico la prima per 4 e la ſeconda per 2, ed uniſco in una ſomma i loro prodotti, lo che fa $4z + 2y = 6a$ la qual' Equazione aggiunta alla precedente $4x + 4y = 8a$, diviene $4x + 4z + 6y = 14a$. Sicchè per fare la miſtione propoſta, cioè per fare 14 libbre di vino da 6 ſoldi, biſogna prendere 4 libbre di quello da 2, 4 libbre da 4, e 6 libbre da 10.

Quando le grandezze da meſcolarſi ſono più di due, e vi ſia più di una grandezza da meſcolare, la quale vaglia meno della grandezza media; in tal caſo biſogna avere riguardo di comparare le grandezze minori della media con le grandezze ad eſſa media maggiori, ovvero per lo contrario le maggiori colle minori, come s'è fatto nell'eſempio di ſopra, perchè così facendo tutta la meſcolanza ſi forma per addizione.; quando per altro comparando le minori colle minori, la meſcolanza ſi formerebbe colla ſottrazione, onde qualche volta ſi perverrebbe alla ultima Equazione, in cui alcuni de' miſti ſarebbero affetti col ſegno —: lo che laſciarebbe il Problema irreſoluto.

Av-

AVVERTIMENTO.

La Regola di Mistione è di grandissimo uso nell'Aritmetica, ma il metodo di sopra esposto facilmente imbroglia, massime quando le grandezze da mescolarsi sono molte; oltre di che per esso non si ha tutta la teoria aritmetica della mistione, perchè dato il prezzo de' composti e la proporzione de' componenti non si può col suo mezzo ritrovare il valore di cadaun componente. Ora pensiamo, che cosa utile sarà estendere la sopradetta teoria in tutt'i suoi casi, servendosi del metodo ordinario, cioè di quello che dipende dalle Regole di sopra spiegate. 28.

PROBLEMA I.

Si vuol formare oncie 20 di metallo, che vaglia 12 lire all'oncia, prendendone una porzione di quello da 8 lire all'oncia, ed un'altra porzione di quello da lire 16 all'oncia. Si dimanda quante oncie per sorte si dovranno prenderne per fare la detta mescolanza?

Chiamo x la quantità del primo metallo, richiesta per fare questa mescolanza, y la quantità del secondo metallo. Per la prima supposizione $x+y=20$, perciò $x=20-y$. Per la seconda supposizione $8x+16y=240$; e per fare svanire x in questa Equazione, si moltiplicherà $20-y$ per 8, il di cui prodotto è

$160-8y$. Si fostituirà questo valore in $8x+16y=240$, e s'averà $160-8y+16y=240$, ovvero riducendo questa Equazione a' termini più semplici $8y=80$, e $y=10$. Dunque $x=20-y=20-10=10$. Il che si cercava.

PROBLEMA II.

Date due mescolanze di Oro e di Argento, nella prima l'Oro sia uno e l'Argento due nella seconda l'Oro sia 4 e l'Argento 5. Volendo fare una terza mescolanza in cui l'Oro sia 3 e l'Argento 4, si dimanda quanta porzione di cadauna delle due mescolanze converrà prenderne per fare la mescolanza terza.

Sia x la richiesta proporzione della prima mescolanza, y quella della seconda. Nella prima porzione sarà l'Oro $\frac{x}{3}$ e l'Argento $\frac{2x}{3}$; nella seconda l'Oro $\frac{4}{9}y$ e l'Argento $\frac{5}{9}y$; dunque per l'Ipotesi nella terza mistura l'Oro sarà $\frac{x}{3}+\frac{4}{9}y=3$, e togliendo le frazioni da questa Equazione s'averà $3x+4y=27$, ovvero $3x=27-4y$. Parimente nella terza mistura sarà l'Argento $\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}y=4$, e senza frazioni questa Equazione si riduce a $6x+5y=36$. Dunque per fare svanire x in questa ultima equazione, si porrà $54-8y$, valore di $6x$ risultante dalla prima Equazione,

ne, è s' averà $54 - 8y + 5y = 36$, e ridotta l'Equazione a' termini più semplici $18 = 3y$, ovvero $6 = y$. E poichè $3x = 27 - 4y = 27 - 24 = 3$, dunque $x = 1$. Lo che si cercava.

PROBLEMA III.

Date tre misture metalliche, nelle quali le ragioni dei loro misti, Argento, Oro, e Rame sieno tali.

Prima mistura 12 A + 3 O + 1 R
Seconda 1 A + 3 O + 12 R
Terza 0 A + 2 O + 14 R. *Si voglia comporre un nuovo Metallo in cui vi sia* 4 A + 3 O + 9 R; *si cerca quali porzioni si deono prendere de' tre dati Metalli.*

Chiamo x la porzione del primo metallo, y la porzione del secondo, e quella del terzo z. Dunque posso esprimere le ragioni de' misti così

$$12x\,A + 3x\,O + x\,R$$
$$1y\,A + 3y\,O + 12y\,R$$
$$0z\,A + 2z\,O + 14z\,R$$

E fatta che sia la nuova mistura

$$12x + y = 4 \quad \text{ovvero } y = 4 - 12x$$
$$3x + 3y + 2z = 3$$
$$x + 12y + 14z = 9$$

Sostituindo nelle due ultime Equazioni il valore di y ritrovato nella prima, si averanno queste due altre Equazioni

$$3x + 12 - 36x + 2z = 3 \quad \text{ovvero } 2z = 33x - 9$$
$$x + 48 - 144x + 14z = 9$$: e sostituindo il valore di z, $x + 48 - 144x + 231x - 63 = 9$

O 2 ridot-

ridotta a' termini più semplici $88x=24$, ovvero $x=\frac{3}{11}$. Ma $y=4-12x$, dunque $y=4-\frac{36}{11}=\frac{8}{11}$, e per conseguenza $z=0$. Cioè per fare la nuova mistura, vi vuole solamente tre porzioni della prima mistura delle tre date, e otto porzioni della seconda, senza prendere cosa alcuna dalla terza, il che è ciò che si cercava.

PROBLEMA IV.

Se di tre dati metalli, il primo de' quali vaglia lire 4 all'oncia, il 2°. lire 6. all'oncia, e il 3°. lire 9, si voglia comporre una mistura di oncie 20 da lire 7. all'oncia; qual porzione di ciascuno dei tre si dee prendere?

Sia la porzione del primo metallo x; la proporzione del secondo y, e quella del terzo z: dunque il valore della prima porzione sarà $4x$, quello della seconda $6y$; della terza $9z$. Per prima condizione, la somma di queste tre porzioni è $x+y+z=20$, e il valore delle medesime $4x+6y+9z=140$, ch' è la seconda condizione del Problema. due per tanto sono le condizioni e due parimenti l' Equazioni che da esse nascono, e tre le ignote; sicchè il Problema è indeterminato s. n. 12. Ora, poichè $x+y+z=20$, ridotta questa Equazione sottrando $x=20-y-z$, e perciò $4x=80-4y-4z$. Sostituito questo valore di $4x$ nella seconda Equazione, averemo $80-4y-4z+6y+9z=140$,

$=140$, la quale ridotta a' minori termini $2y + 5z = 60$; e questa è l'Equazione ch' esprime il Problema. Ma essendovi in essa due ignote, bisogna determinare a piacere il valore di y o di z, con tali restrizioni però, sicchè il valore delle due altre ignote non resti affetto col segno $-$.

Ora essendo $2y + 5z = 60$, e $2y = 60 - 5z$, perciò $y = 30 - \frac{5}{2}z$; dunque z è minore di 12. Parimente, essendo $x = 20 - y - z$, e sostituindo il valore di y, $x = 20 - 30 + \frac{5}{2}z - z$, e ridotta a' termini minori $x = \frac{3}{2}z - 10$, dunque z è maggiore di $6\frac{2}{3}$. Tutte dunque le grandezze tra $6\frac{2}{3}$ e 12 possono sostituirsi in luogo di z, e si ritroveranno poi in termini positivi il valore delle due altre ignote. P. e. Sia $z = 7$, dunque $2y = 60 - 35 = 25$, e $y = 12\frac{1}{2}$, per conseguenza $x = \frac{1}{2}$; se $z = 8$, $2y = 20$, e $y = 10$, perciò $x = 2$; se $z = 9$, $2y = 15$, e $y = 7\frac{1}{2}$, perciò $x = 3\frac{1}{2}$; se $z = 10$, $2y = 10$, e $y = 5$, dunque $x = 5$; se $z = 11$, $2y = 5$, e $y = 2\frac{1}{2}$, per conseguenza $x = 6\frac{1}{2}$.

Ecco la Tavola di queste restrizioni o sia Limiti.

Tavola de' Limiti.

x	$\frac{1}{2}$	2	$3\frac{1}{2}$	5	$6\frac{1}{2}$
y	$12\frac{1}{2}$	10	$7\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$
z	7	8	9	10	11

PROBLEMA V.

Data la proporzione dei componenti, e il prezzo dei composti; determinare il prezzo di ciaschedun componente.

Sieno i Metalli componenti M ed N, e due parimente i composti; uno de' quali $3M + 4N = 10$
l'altro $5M + 6N = 16$.

Chiamo x il prezzo di M, e y il prezzo di N. Dunque, sostituiodo queste lettere picciole in luogo delle graode, averemo $3x + 4y = 10$
e $5x + 6y = 16$
perciò $5x = 16 - 6y$
e $x = \frac{16}{5} - \frac{6}{5}y$
E per fare svaoire x nella prima Equazione, moltiplico il valore di x per 3, ed averò $3x = \frac{48}{5} - \frac{18}{5}y$; dunque la prima Equazione si riduce a questa

$$\frac{48}{5} - \frac{18}{5}y + 4y = 10$$

ovvero $\frac{48}{5} + \frac{2}{5}y = 10$, ovvero $\frac{2}{5}y = \frac{2}{5}$, per conseguenza $y = 1$; e $x = \frac{16}{5} - \frac{6}{5}y = \frac{16}{5} - \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2$. Il che si cercava.

PROBLEMA VI.

In una manifattura d' oro di dato peso, cercare se v' è mescolata alcuna porzione d' Argento.

Questo è il famoso Problema della Corona d'oro di Jerone, che risolse Archimede.

Sia

Sia il peso della manifattura di libbre 10, e in essa la porzione dell'oro sia x, quella dell' Argento y; dunque $x + y = 10$, e $y = 10 - x$.

Si suppone come cosa dimostrata dall' esperienza, e di cui si dà la ragione nell' Idrostatica, che i metalli posti nell'acqua perdono una parte del loro peso, che l'oro ne perde meno dell' Argento e di qualunque altro metallo; che di 10 libbre di oro si perde $\frac{1}{2}$ di libbra e di 10 libbre d' Argento perdesi 1 libbra. Dunque se di 10 libbre di Oro perdesi $\frac{1}{2}$ di libbra, quanto si perderà della quantità x, cioè

$$10 . \tfrac{1}{2} :: x . \frac{5x}{90}.$$

Perciò $\frac{5x}{90}$ sarà la perdita dell'Oro x. Parimente se 10 libbre d' Argento perdono 1 libbra, quanto perderà l'Argento y. Lo che posto in proporzione

$$10 . 1 :: y . \frac{y}{10}.$$

E $\frac{y}{10}$ sarà la perdita dell' Argento y. Ora per l'esperienza si ha che la manifattura perde $\frac{3}{4}$ di libbra del suo peso, e questa perdita è eguale a quella fatta dall' Oro x e dall' Argento y; dunque $\frac{5x}{90} + \frac{y}{10} = \frac{3}{4}$. E sosti-

tuindo il valore di y sopra ritrovato, averemo $\frac{5x}{90}+\frac{10-x}{10}=\frac{2}{3}$, e ridotte quest' Equazioni a termini minori $\frac{5x}{90}+1-\frac{9x}{90}=\frac{2}{3}$, ovvero $\frac{4x}{90}=\frac{1}{3}$, cioè $12x=90$, per conseguenza $x=7\frac{1}{2}$. Ma $y=10-x$, dunque $y=2\frac{1}{2}$. lo che si cercava.

PROBLEMI D' INTERESSE.

Poichè sono di grandissimo uso anco i Problemi d'interesse, pensiamo di estenderli qui in un modo brieve e facile a vantaggio de' Principianti. Tutto ciò che sopra questa materia dir si può, lo comprenderemo in tre Problemi. Col primo, dato il capitale e accordato l'annuo pro, ritroveremo il pro per anni, mesi, e giorni dati: col secondo dato il capitale ed accordato l'annuo pro, che vada sopra il capitale, cioè in aumento del capitale, determineremo il tempo necessario, perchè il capitale abbia un dato aumento; col terzo, dato il capitale ed accordato l'annuo pro, cercaremo in quanto tempo si diffalcherà il capitale, pagando ogni anno una data somma, maggiore dell'annuo pro.

PRO-

PROBLEMA I.

Dato un Capitale di Ducati 557 per pagare l'annuo pro di 5 per 100; si cerca cosa si debbe pagare di pro per anni 3 e mesi 7.

Questo Problema è della Regola del tre composta spiegata nel Lib. IV. Si vede chiaramente, che il richiesto pro non solo sarà tanto maggiore di 5, quanto 557 è maggiore 100, ma ancora quanto tre anni e 7 mesi sono maggiori di uno. Dunque bisogna ritrovare la ragion composta del capitale e del tempo, facendo questa proporzione

Mesi. Capitale. Mesi. Capit. pro.
$12 \times 100 . 43 \times 557 :: 5 . x.$
e moltiplicando i medj e gli estremi, averemo $1200x = 119755$, sicchè dividendo per 1200, $x = 99\frac{955}{1200}$; il che si cercava.

PROBLEMA II.

Dato il capitale e stabilito l'annuo pro che vada sopra il capitale, cioè in aumento di capitale; determinare in quanto tempo il capitale avrà un dato aumento.

Per risolvere questo problema, bisogna cercare in qual maniera s'aumenti di anno in anno il pro sopra il capitale. Lo che per facilmente conseguire, esprimeremo per lettere in un modo generalissimo il capitale e il pro.

Sia

Sia p. e. il capitale a, il pro di un' anno b, e facciasi l'aumento e in tempo x. Poichè il pro del primo anno è b, e questo ha da aumentare il capitale nel secondo anno; sarà dunque il capitale dell' anno secondo così aumentato $a+b$. Onde, se il capitale a ha b di annuo pro, il capitale $a+b$ avrà per conseguenza di pro $\frac{ab+bb}{a}$, quarto termine di questa proporzione, $a \,.\, b :: a+b \,.\, \frac{ab+bb}{a}$. Dunque il capitale nel fine del secondo, o sia nel principio del terzo anno sarà $a+b+\frac{ab+bb}{a}$, ovvero ponendo tutti questi termini sotto il divisore a, egli sarà $\frac{a^2+2ab+b^2}{a}=\frac{\overline{a+b}^2}{a}$. Collo stesso metodo si ritroverà, che il capitale nel fine del terzo anno $=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2}$ $=\frac{\overline{a+b}^3}{a^2}$: nel fine del quarto anno $=\frac{\overline{a+b}^4}{a^3}$ e finalmente nel fine dell' anno $x=\frac{\overline{a+b}^x}{a^{x-1}}$.

Ora questo capitale nel fine dell' anno x ha da essere eguale ad $a+c$, per la supposizione cioè $a+c=\frac{\overline{a+b}^x}{a^{x-1}}$, ovvero $\overline{a+c}\times a^{x-1}$

$\overline{a+b}^{x}$. Bisogna per tanto ritrovare il valore di x; lo che brevemente conseguiremo col mezzo dei Logaritmi. Imperciocchè, essendo $\overline{a+b}^{x} = \overline{a+c} \times a^{n-1}$, sarà anche *log.* di $\overline{a+b}^{x} =$ *log.* di $\overline{a+c} \times a^{n-1}$; ma *log.* di $\overline{a+b}^{x} = x \times log.\, \overline{a+b}$, e *log.* di $\overline{a+c} \times a^{n-1}$ $= log.\, \overline{a+c} + \overline{x-1} \times log.\, a = log.\, \overline{a+c} + x \times log.\, a - log.\, a$: dunque

$x \times log.\, \overline{a+b} = log.\, \overline{a+c} + x \times log.\, a - log.\, a$, e trasportato $x \times log.\, a$

$x \times log.\, \overline{a+b} - x \times log.\, a = log.\, \overline{a+c} - log.\, a$. e dividendo da una parte e dall'altra per *log.* $\overline{a+b} - log.\, a$, averemo

$$x = \frac{log\, \overline{a+c} - log.\, a}{log.\, \overline{a+b} - log.\, a}$$

, cioè x sarà eguale al logaritmo di $a+c$ meno il logaritmo di a, diviso questo residuo per il *log.* di $a+b$ meno il *log.* di a.

Il Problema è risolto, se l'aumento che si cerca, si fa in un preciso numero di anni; ma se il suddetto aumento si compie non solo scorso un dato numero di anni, ma anco in una certa porzione del susseguente: allora conviene ritrovare questa porzione operando così.

Sia n il ritrovato numero intiero degli anni; dunque nel fine degli anni n il capitale ascen-

ascenderà ad $\frac{\overline{a+b}^n}{a^{n-1}}$; il quale sottratto da $a+c$ darà per residuo $a+c-\frac{\overline{a+b}^n}{a^{n-1}}$. Questo residuo è l'aumento del capitale $\frac{\overline{a+b}^n}{a^{n-1}}$, fatto in quella porzione di anno, che si cerca.

Si chiami y questa porzione: e, se a in un'anno dà b, necessariamente $\frac{\overline{a+b}^n}{a^{n-1}}$ nella porzione y di un'anno darà $by\times\frac{\overline{a+b}^n}{a^n}$, per la Regola del Tre composta. Ora questo quarto termine proporzionale ritrovato è eguale al residuo di cui sopra s'è fatta menzione; dunque $by\times\frac{\overline{a+b}^n}{a^n}=a+c-\frac{\overline{a+b}^n}{a^{n-1}}$, cioè $by\times\frac{\overline{a+b}^n}{a^n}a^{n+1}+ca^n-a\times\overline{a+b}^n$, sicchè $y=\frac{a^{n+1}+ca^n}{b\times\overline{a+b}^n}-\frac{a}{b}$.

Applichiamo la risoluzione generale del Problema ad un caso particolare. Sia il capitale 100, l'annuo pro 5, e 18 l'aumento del pro sopra il capitale. Sarà dunque $a=100$, $b=5$, $c=18$, $a+b=105$, ed $a+c=118$; e poichè *logar.* $\overline{c+a}=2.0718820$,

log.

$log. \overline{a+b} = 2.0211893$, e $log. a = 2.0000000$; sarà $log. \overline{a+e} - log. a = 718820$, e $log. \overline{a+b} - logar. a = 211893$. Si divida 718820 per 211893, e si averà per quoziente il numero intiero 3 con una frazione. Onde il capitale 100 averà l'aumento 18, non solo in tre anni ma ancora in una certa porzione del quarto. Cioè, se $n = 3$, sarà $\frac{a^{n+1} + ea^n}{b \times \overline{a+b}^n} = 20 + \frac{1180}{9261}$, da cui sottratto $\frac{a}{b} = 20$, la porzione dell'anno quarto sarà $\frac{1180}{9261}$.

PROBLEMA III.

Dato il capitale, ed accordata l'annua pro; si cerca in quanti anni si estinguerà il capitale sudetto, pagando di anno in anno una certa somma maggiore dell'annua pro per salda di detta pro, e a diffalco del capitale.

Risolveremo anche questo Problema in un modo generalissimo; e chiameremo a il capitale, b l'annuo pro, e c la somma maggiore di b pagabile di anno in anno. Ora poichè c è maggiore di b; in fine del primo anno bisogna sottrarre dal capitale a il residuo $c - b$, sicchè nel secondo anno il capitale sarà $a - c + b$.

Ma se il capitale a ha d'annuo pro b, il capitale $a - c + b$ avrà dunque di pro

ab

$\frac{ab - bc + bb}{a}$, quarto termine di questa proporzione, $a \,.\, b :: a - c + b \,.\, \frac{ab - bc + bb}{a}$.
Bisogna sottrarre da c il pro ritrovato per il capitale del secondo anno, e questo residuo $c - \frac{ab - bc + bb}{a}$ ovvero $\frac{ac - ab + bc - b^2}{a}$ sottrarre parimente da $a - c + b$, capitale del secondo anno; allora averemo $a - c + b - \frac{ac - ab + bc - b^2}{a}$, cioè $\frac{a^2 - 2ac + 2ab - bc + bb}{a}$ per capitale nel terzo anno.

E procedendo con questo metodo, ritroveremo la diminuzione di capitale essere nel terzo anno $\frac{a^2c - a^2b + 2abc - 2ab^2 + b^2c - b^3}{a^2} = \overline{c - b} \times \frac{\overline{a + b}^2}{a^2}$. nel quarto $\frac{a^3c - a^3b + 3a^2bc - 3a^2b^2 + 3ab^2c - 3ab^3 + b^3c - b^4}{a^3} = \overline{c - b} \times \frac{\overline{a + b}^3}{a^3}$. E così in tutti gli altri anni susseguenti; perciò nell'anno x la diminuzione sarà $\overline{c - b} \times \frac{\overline{a + b}^{x-1}}{a^{x-1}}$. Le diminuzioni dunque possono essere così espresse; $c - b \,.\, \overline{c - b} \times \frac{\overline{a + b}}{a} \,.\, \overline{c - b}$.

x

$\times \frac{\overline{a+b}^2}{a^2} \cdot \overline{c-b} \times \frac{\overline{a+b}^3}{a^3}$ .... $\overline{c-b} \times$
$\frac{\overline{a+b}^{x-1}}{a^{x-1}}$. le quali formano una progressione geometrica, che progredisce in ragione di a ad $a+b$. Ma, come abbiamo veduto nel Lib. III. la somma di tutt'i termini di una progressione geometrica meno l'ultimo, alla somma di tutt'i medesimi termini meno il primo, è nella medesima ragione della progressione stessa; dunque (chiamo s la somma di tutt'i termini, p il primo termine, u l'ultimo) sarà

$s-u. \ s-p :: a. \ a+b.$

e moltiplicando gli estremi e i medj, $sa+sb-au-bu = sa-ap$, ovvero $sb = au+bu-ap$,

$$s. = \frac{\overline{a+b} \times u - ap}{b}.$$

e sostituendo il valore di p e di u, nel nostro caso $s = \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^x}{ba^{x-1}} - \frac{ac}{b} + a$. Questa è la somma delle diminuzioni del capitale, fatte nel tempo x; ma poichè in fine di detto tempo elle sono eguali al capitale, per ipotesi: dunque $\frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^x}{ba^{x-1}} - \frac{ac}{b} + a = a$, ovvero levando a da una parte e dall'altra, e trasportando $\frac{ac}{b}$

$\frac{ac}{b}$ nel secondo membro; $\frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^{x}}{ba^{x-1}} = \frac{ac}{b}$

e moltiplicando per ba^{x-1}, $\overline{c-b} \times \overline{a+b}^{x} = ca^{x}$. Dopo tutto ciò per ritrovare il valore di x, si serviremo dei Logaritmi. Il Logaritmo di $\overline{c-b} \times \overline{a+b}^{x} = log.\ \overline{c-b} + x \times log.\ \overline{a+b}$; il Logaritmo di $ca^{x} = log.\ c + x \times log.\ a$: dunque

$$log.\ \overline{c-b} + x \times log.\ \overline{a+b} = log.\ c + x \times log.\ a$$

ovvero $x \times log.\ \overline{a+b} - x \times log.\ a = log.\ c - log.\ \overline{c-b}$

dunque $x = \frac{log.\ c - log.\ \overline{c-b}}{log.\ \overline{a+b} - log.\ a}$.

Tutto questo calcolo è fatto sulla supposizione, che gli anni ricercati per estinguere il capitale sieno intieri; ma se oltre un dato numero di anni intieri vi volesse una porzione dell'anno seguente, allora bisognerebbe operare in questo modo.

Sia n il numero intiero degli anni, i quali siano stati ritrovati operando, come s'è detto. Allora la diminuzione del capitale a

negli anni n sarà $\frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^{n}}{ba^{n-1}} - \frac{ac}{b} + a$,

per conseguenza in fine degli anni suddetti il capitale rimarrà $\frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^{n}}{ba^{n-1}}$ a

Si

Si chiami y la porzione dell' anno, che si cerca. Poichè il capitale a in un' anno ha b di pro, il capitale $\frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{ba^{n-1}}$ in tempo y avrà $cy - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{a^n} \times y$ (per la Regola del Tre composta) di pro parimente. Ma questo pro unito al suo capitale ha da eguagliarsi alla somma che per il tempo y è pagabile; cioè se per un'anno la somma è c, per la porzione y di un' anno la somma dovrà essere cy. Dunque

$$cy = \frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{ba^{n-1}} + cy - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{a^n} \times y;$$

ovvero

$$\frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{ba^{n-1}} = \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{a^n} \times y;$$

e moltiplicando per a^n,

$$\frac{ca^{n+1}}{b} - \frac{\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n}{b} \times a = \overline{c-b} \times \overline{a+b}^n \times y,$$

e dividendo per $\overline{c-b} \times \overline{a+b}^n$

$$\frac{ca^{n+1}}{b \times \overline{c-b} \times \overline{a+b}^n} - \frac{a}{b} = y.$$

S' applichi ora questa generale risoluzio-

 ne

ne ad un caso particolare; e sia p. e. il capitale $a = 150$, l' annun pro $b = 10$, la somma pagabile di anno in anno $c = 50$; dunque $c - b = 40$, e $a + b = 160$. Onde essendo il Log. di $a = 2.1760913$, il Log. di $c = 1.6989700$, il Log. di $c - b = 1.6020600$, e il Logar. di $a + b = 2.2041200$; sarà per conseguenza $Log. \overline{c - b} = 969100$, e $log. \overline{a + b} - log. a = 280287$.

Si divida 969100 per 280287, e s' averà per quoziente il numero intiero 3 con una certa frazione. Dunque in tre anni ed in una certa porzione del quarto si estinguerà il capitale 150; la quale sarà eguale (essendo $n = 3$, per conseguenza $\frac{ca^{n+1}}{b \times \overline{a + b}^n \times \overline{c - b}}$ $= 15 + \frac{7365}{16384}$, e $\frac{a}{b} = 15$) a $\frac{7365}{16384}$.

Avvertimento.

Si potrebbero aumentare questi Problemi, nella maniera che sono state aumenti nel Lib. III. quelli della Progressione Geometrica; imperciocchè anche in questi date tre cose si può cercare la quarta, qualunque ella sia, p. e. *Dato il capitale l' annuo pro e il tempo nel quale s' è estinto il capitale medesimo, pagando di anno in anno una certa somma di soldo maggiore del capitale*, de-

determinare la grandezza di questa somma, e così degli altri: lo che a me basta avere accennato, persuaso rimanendo che i Principianti col Canone o sia regola generale insegnata ne' Problemi antecedenti facilmente risolveranno tutt'i Problemi di simil sorta.

SEZIONE SECONDA

Risoluzioni di molti Problemi.

AVVERTIMENTO.

Questa seconda Sezione comprende un buon numero di Problemi, tratti la maggior parte da' Libri Aritmetici di Diofanto, i quali si risolvono colle Regole analitiche spiegate nella Sezione prima. Ivi per verità abbiamo applicate quelle Regole a molti Problemi di simil sorta, sicchè bastevolmente inteso abbiamo l'uso delle medesime; e quelli che quì aggiungiamo, non serviranno che per vedere l'estesa maggiore di questo uso. Oltre di che per via di note pensiamo di far rilevare le ingegnose espressioni delle ignote, dalle quali molte volte dipende la risoluzione facile dei Problemi, e le quali non s'imparano che co' replicati esempj. In fine vedremo in queste note il vero carattere dell' Analisi di Diofanto; lo che ci

farà conoscere la differenza che passa tra l' Analisi di esso e quella di Cartesio ch'è stata trattata nella Sezione precedente. Questi Problemi diconsi *semplici*, perchè in uno de' membri della Equazione esprimente il Problema, non hanno che l'ignota lineare, p. e. $x = c - d$; e tali ancora chiameremo quelli i quali, mentre hanno l'ignota ascendente al quadrato, al cubo, ec. non la tengono meschiata nello stesso tempo con altre grandezze note. Così se l'Equazione esprimente il Problema fosse $x^2 = cd - a$ ovvero $x^3 = a^2 + c$ ec. anche in tal caso il Problema si chiamerà semplice, perchè l'Equazione che lo esprime può essere ridotta ad $x = \sqrt{cd - a}$ ovvero $x = \sqrt[3]{a^2 + c}$ per la Regola 5ª. num. 18.

Si distinguono essi in Problemi *determinati*, perchè hanno tant' Equazioni, quante sono le grandezze che si cercano; e in Problemi *indeterminati*, quando il numero delle grandezze cercate è maggiore di quelle dell'Equazioni. Tratteremo prima dei determinati, poi degl' indeterminati; non lasciando in fine di dire qualche cosa dei Problemi *di semplice*, *di doppia*, *e di tripla Equalità*, per darne una sufficiente idea della natura di essi, e del metodo di risolverli.

Per abbreviare, chiameremo *Equazione condizionale* quella che una sola condizione comprende; ed *Equazione costitutiva* quel-

la che esprime il Problema, perchè comprende tutte le condizioni in esso esistenti.

CAP. I.

Problemi semplici Determinati.

PROBLEMA PRIMO.

Ritrovare due numeri la somma e la differenza de' quali sia eguale ad un' altro dato numero.

Risolveremo così questo Problema come tutti gli altri susseguenti, in un modo generalissimo per lettere; lo che facendo trarremo dei Canoni o Regole generali per risolvere senz' Algebra Problemi simili. Daremo in questa risoluzione un saggio de' differenti metodi, co' quali ogni Problema può essere risoluto, per servirsi poi in progresso di quel metodo, che sarà più adattato alla natura del Problema.

Sieno i due ricercati numeri x e y; e sia $x-y=b$.

Primo Metodo.

La prima Equazione condizionale è $x+y=a$, dunque $x=a-y$. La seconda Equazione condizionale $x-y=b$, in cui

sostituindo il valore di x ritrovato di sopra, averemo l'Equazione costitutiva $a-2y=b$, ovvero $a-b=2y$, e per conseguenza $\frac{a-b}{2}=y$. Ma $x=b+y$, dunque sostituindo il valore di y, averemo un' altra Equazione costitutiva $x=b+\frac{a-b}{2}=\frac{2b+a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$; il che si cercava.

Secondo Metodo.

La prima Equazione Condizionale è $x+y=a$, dunque $x=a-y$. La seconda Equazione condizionale è $x-y=b$, dunque $x=b+y$; ora eguagliando questi due valori di x, averemo l'Equazione costitutiva $a-y=b+y$, e per conseguenza $a-b=2y$, e dividendo per 2, $\frac{a-b}{2}=y$; come sopra.

Terzo Metodo.

$x+y=a$ è la prima Equazione condizionale;
$x-y=b$ è la seconda; sommandole
Som. $2x=a+b$
e $x=\frac{a+b}{2}$; lo che s'è anche ritrovato di sopra.

Nota

Nota I.

Alcune volte bisogna procurare di esprimere le grandezze ignote più conformi alla natura del Problema che sia possibile; lo che facilita la risoluzione del Problema medesimo. Così nel nostro caso, poichè si tratta della somma e della differenza di due grandezze, esprimeremo la grandezza maggiore $x+y$, e la minore $x-y$. Dunque la somma di tutte due sarà $2x=a$, e per conseguenza $x=\frac{a}{2}$; la differenza $2y=b$, cioè $y=\frac{b}{2}$. Sicchè $x+y=\frac{a+b}{2}$, e $x-y=\frac{a-b}{2}$, come sopra.

Nota II.

L'espressioni, o sia posizioni delle ignote usate da Diofanto nella risoluzione de' suoi Problemi sono ingegnosissime, e conformi alla natura del Problema. Secondo il suo metodo in questo Problema ch' è il primo del suo primo Libro, se chiamasi x il cercato numero minore; per una delle condizioni del Problema sarà $x+b$ la parte maggiore. Per l'altra condizione $x+x+b=a$, ovvero $2x=a-b$, e $x=\frac{a-b}{2}$: dunque le parti di

a faranno $\frac{a-b}{2}$, e $\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$; il che si aveva ritrovato co' gli altri metodi. Con questo metodo però il problema è risoluto più elegantemente; poichè esprimendosi una sola ignota, la risoluzione non comprende che una sola Equazione. Questa eleganza nasce da una tal qual imperfezione dell'Algebra di Diofanto, la quale, non somministrando caratteri, che per segnare una sola grandezza ignota, cioè N per segnare la radice, Q per segnare il Quadrato, C per segnare il cubo ec. come abbiamo veduto §. Lib. II. versa principalmente sulla posizione delle ignote. Dissi *tal qual imperfezione*, imperciocchè se le ignote sono due solamente, il metodo delle posizioni secondo Diofanto è preferibile all'ordinario, non richiededovisi molta fatica per determinate due ignote che sieno conformi alla natura del Problema. Ma se le ignote sono tre, quattro ec. molte volte meglio sarà seguire il metodo ordinario, e lasciare da parte quello di Diofanto, perchè allora le posizioni imbrogliano, come in altro luogo si farà vedere.

Nota

Nota III.

Da questa risoluzione generale si può trarre il seguente Canone, che servirà per risolvere questo Problema. *Se si sommano i due numeri dati, e si sottri il minore dal maggiore; la metà della somma, e la metà del residuo daranno i numeri che si cercano.* P. e. se $a=100$, e $b=40$; allora $x=\frac{a+b}{2}=\frac{140}{2}=70$. E $y=\frac{a-b}{2}=\frac{60}{2}=30$.

PROBLEMA II.

Ritrovare due numeri eguali ad un dato numero, e tali sicchè il maggiore sia eguale al minore preso un certo numero di volte ad accresciuto di una data grandezza.

Sia il numero dato a, x e y li due cercati. Dunque $x+y=a$, e $x=a-y$. Sia ancora per l' altra condizione $x=my+b$; dunque $my+b=a-y$ ovvero $my+y=a-b$, e dividendo per $m+1$, resterà $y=\frac{a-b}{m+1}$. Ma $x=a-y$, dunque sostituindo il valore ritrovato di y, averemo $x=a-\frac{a-b}{m+1}=\frac{am+a-a+b}{m+1}=\frac{am+b}{m+1}$.

Cal

Col metodo di Diofanto.

Sia x la parte minore di a; dunque per l'ipotesi la parte maggiore sarà $mx+b$. Ed ecco che il Problema si risolve con questa sola Equazione, $x+mx+b=a$, per conseguenza $x+mx=a-b$, e $x=\frac{a-b}{1+m}$, come sopra.

Se p. e. $a=100$, $b=20$, e $m=3$; in tal caso la parte minore $y=\frac{a-b}{m+1}=\frac{100-20}{4}=\frac{80}{4}=20$, e $x=\frac{am+b}{m+1}=\frac{100\times3+20}{4}=\frac{320}{4}=80$. E queste sono le particolari condizioni della terza Questione del Libr. I. di Diofanto.

Se si supponesse b eguale a zero; allora converrebbe esprimere il Problema così: *dividere un numero in due parti, sicchè la maggiore sia eguale alla minore presa un certo numero di volte*; ovvero il che è lo stesso, *sicchè la maggiore sia in data ragione colla minore*. Allora, se si farà $a=60$, e $m=3$, sarà $y=\frac{a}{m+1}=\frac{60}{4}=15$, e $x=\frac{am}{m+1}=\frac{60\times3}{4}=\frac{180}{4}=45$; Diof. Quest. 2. Lib. I.

No-

NOTA.

Da questo Esempio si rileva, quanto fecondo sia il metodo di risolvere i Problemi generalmente per via di lettere; imperciocchè la risoluzione generale può applicarsi a' Problemi simili, benchè differenti sieno di qualche particolarità.

PROBLEMA III.

Dividere un numero dato in due parti, tali che un' aliquota qualunque di una d'esse parti, più un' aliquota dissimile dell' altra parte, sieno eguali ad un numero dato.

Il numero da dividere sia a, le sue parti x e y; dunque la prima Equazione condizionale sarà $x+y=a$, e per conseguenza $x=a-y$. L'altra Equazione condizionale è $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=b$, nella quale sostituitovi il valore di x sopra ritrovato, averemo $\frac{a-y}{m}+\frac{y}{n}=b$; e facendo svanire le frazioni $an-ny+my=bmn$, ovvero (se m è maggiore di n) $my-ny=bmn-an$, e dividendo per $m-n$, averemo poi $y=\frac{bmn-an}{m-n}$; onde bisogna che bm sia maggiore di a, ovvero

ro b maggiore di $\frac{a}{m}$. Ma $x = a - y$; dunque $x = a - \frac{bmn - an}{m - n} = \frac{am - an}{m - n}$ $\frac{- bmn + an}{m - n} = \frac{am - bmn}{m - n}$; e perciò bisogna che a sia maggiore di bn, cioè b minore di $\frac{a}{n}$.

Col metodo di Diofanto.

Si chiami x l'aliquota m della prima parte; sarà dunque questa prima parte mx. L'aliquota n della seconda parte per l'ipotesi sarà $b - x$, e la seconda parte intiera sarà $bn - nx$. Dunque l'Equazione costitutiva diverrà $mx + bn - nx = a$, ovvero $mx - nx = a - bn$, e dividendo per $m - n$, $x = \frac{a - bn}{m - n}$. Si moltiplichi questa ultima Equazione per m, perchè allora la prima parte $mx = \frac{am - bmn}{m - n}$. E poichè la seconda parte è $bn - nx$, sostituindovi il ritrovato valore di x, $bn - nx = bn - \frac{an - bnn}{m - n} = \frac{bmn - bnn - an + bnn}{m - n} = \frac{bmn - an}{m - n}$, come s'aveva ritrovato coll'altro metodo.

No-

NOTA.

Le restrizioni o Limiti dei numeri noti sono necessarie per avere la risoluzione dei Problemi in numeri positivi, perchè tali appunto dal Problema richiedonsi. La risoluzione generale che abbiamo data, ce le fa facilmente rilevare; e questo è un altro vantaggio che si trae dal metodo di risolvere i Problemi per lettere. I Commentatori di Diofanto che questo metodo non possedevano, hanno molte volte inventato dei Teoremi per rinvenire l' origine di tali restrizioni, le quali Diofanto prima della risoluzione premette, sempre che sieno necessarie. Se Diofanto ritrovate l' abbia per via di tali speculazioni, ovvero con qualche suo metodo particolare di risolvere universalmente le Questioni, che a noi non ha fatto palese (lo che andò a genio di tutti gli Antichi) lascio a chiunque il giudicarlo. Il vero si è, che le regole delle Equazioni, con chiarezza espresse da Diofanto nella risoluzione delle sue Questioni, sono le medesime che le accennate nella Sezione precedente; che le Questioni sono proposte generalmente colla restrizione dei numeri noti, quando la necessità il richiede; che le risoluzioni, nelle quali Diofanto esprime sempre i numeri noti con cifre, come s'è detto nel Lib. II. sono tali, sicchè in quanti mon-

di possono essere cambiati i numeri e conservate le restrizioni (se ve ne sono) rante differenti risoluzioni si averanno delle Questioni medesime, osservato lo stesso metodo; lo che ad evidenza fa vedere che l'Analisi di Diofanto differisce dalla Cartesiana solranto nel segnare i numeri noti, servendosi questa di lettere e quella di cifre.

Supponiamo dunque nel dato Problema, che $a=100$, $m=5$, $n=3$ bisogna che b sia maggiore di $\frac{100}{5}$, e minore di $\frac{100}{3}$. Sia dunque $b=30$, allora $x=\frac{100\times 5-30\times 5\times 3}{5-3}$ $=\frac{500-450}{2}=25$, e $y=\frac{30\times 5\times 3-100\times 3}{5-3}$ $=\frac{450-300}{5-3}=75$; ch'è il caso della Questione 5 di Dinfanto.

PROBLEMA IV.

Dividere un numero dato in due parti, di modo che una certa aliquota della prima parte sia eguale ad un'altra dissimile aliquota della seconda parte, accresciuta di un dato numero.

Il numero da dividere sia a, le parti componentilo x e y. La prima Equazione condizionale sarà dunque $x+y=a$, e per conseguenza $x=a-y$. L'altra Equazione condiziona-

zionale sia $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} + b$; dunque $x = \frac{my}{n} + bm = a - y$, ovvero $my + bmn = an - ny$, cioè $my + ny = an - bmn$. Dividasi per $m + n$ l'uno e l'altro membro di questa ultima Equazione, ch'è la costitutiva, e s'averà $y = \frac{an - bmn}{m + n}$. Bisogna che a sia maggiore di bm, ovvero b minore di $\frac{a}{m}$. Ma $x = a - y$; dunque $x = a - \frac{an - bmn}{m + n} = \frac{am + an - an + bmn}{m + n} = \frac{am + bmn}{m + n}$.

Col metodo di Diofanto.

L'aliquota n della seconda parte a si chiami x, dunque la seconda parte della divisione di a sarà nx. L'aliquota m della prima parte è per l'ipotesi $x + b$, dunque la prima parte sarà $mx + bm$. Ma $mx + bm + nx = a$, e per conseguenza $mx + nx = a - bm$; sicche dividendo per $m + n$, $x = \frac{a - bm}{m + n}$. Le parti dunque di a saranno, prima parte $mx + bm = \frac{am - bmm}{m + n} + bm = \frac{am - bmm + bmm + bmn}{m + n} = \frac{am + bmn}{m + n}$, come s'è

ri-

ritrovato col metodo di sopra; e così dell' altra.

Dunque se $a=100$, $m=4$, $n=6$, bisogna che b sia minore di $\frac{100}{4}=25$. Ora sia $b=20$, sarà $x=\frac{100 \times 4 + 20 \times 4 \times 6}{4+6}=\frac{400+480}{10}=88$, e $y=\frac{100 \times 6 - 20 \times 4 \times 6}{4+6}=\frac{120}{10}=12$; ch'è la risoluzione della Quest. 6. Lib. I. di Diofanto.

PROBLEMA V.

Ritrovare una grandezza, che accresciuta di un numero dato, e diminuita di un'altro dato numero la somma sia alla differenza in ragione data.

Sia la grandezza che si cerca x, il numero d'accrescergli a, quello da diminuirgli b $x+a \,.\, x-b :: m \,.\, n$.

Si moltiplichino gli estremi e medj di questa proporzione, e averemo l'Equazione costitutiva $nx+an=mx-bm$; la qual' Equazione può essere ridotta a questa, se m è maggiore di n, $mx-nx=an+bm$, ovvero $x=\frac{an+bm}{m-n}$.

Se si suppone $a=20$, $b=100$, $m=3$, $n=1$, sarà $x=\frac{20 \times 1 + 100 \times 3}{3-1}=\frac{320}{2}=160$,

cioè

cioè $\frac{160+20}{180} \cdot \frac{160-100}{60} :: 3 . 1.$

E così s'averà risoluta la Quest. XI. Lib. I. di Diofanto.

NOTA.

La risoluzione generale di questo Problema può applicarsi a qualunque altro Problema simile, benchè le condizioni non sieno del tutto eguali. P. E.

La grandezza ignota $x-20$ *è tripla di* $x-100$; *si ritrovi il valore di* x.

Si ritroverà il valore di x, facendo $a = -20$, $b = 100$, $m = 3$, e $n = 1$; allora per il Canone generale $x = \frac{-20 \times 1 + 100 \times 3}{3-1} = \frac{280}{2} = 140$:

cioè $\frac{140-20}{120} \cdot \frac{140-100}{40} :: 3 . 1.$

E questo è il Problema settimo del primo Lib. di Diofanto.

PROBLEMA VI.

Aggiungere a due dati numeri un certo numero, acciocchè le somme sieno in data ragione.

Siano i numeri dati a e b, x il certo numero che si ha d'aggiungere ad essi, e $a+x . b+x :: m . n$. Dunque $an+nx = bm+mx$, ovvero, se m è maggiore di n, $mx-nx = an-bm$, e dividendo per $m-n$, $x =$

$\frac{an - bm}{m - n}$. In tal caso bisogna che an sia maggione di bm, e per conseguenza che la ragione di a a b sia maggiore che quella di m ad n; attesochè dividendo an e bm per bn, si averà $\frac{a}{b}$ maggiore di $\frac{m}{n}$, cioè la ragione di a a b maggiore di quella di m ad n.

Se in vece di aggiungere si avesse da sottrarne, si averebbe questa analogia $a - x$. $b - x : : m . n$, e $an - nx = bm - mx$, e per conseguenza $x = \frac{bm - an}{m - n}$. Lo che è vero per questa ragione ancora, che per ipotesi i numeri a e b diventano negativo, onde il canone generale, cioè il valore di x si cangia in questo, $x = \frac{-an + bm}{m - n}$.

Sia dunque $a = 100$, $b = 20$, $n = 1$, e poichè $100 . 20 : : 5 . 1$. facciasi $m = 3$, perciò $x = \frac{an - bm}{m - n}$ $= \frac{100 \times 1 - 20 \times 3}{3 - 1} = \frac{40}{2} = 20$. Perchè in fatti $\underset{120}{100 + 20} . \underset{40}{20 + 20} : : 3 . 1$. E questa è l'ottava Questione del Lib. I. di Diofanto.

Così nel secondo caso, sia p. e $m = 6$; allora $x = \frac{bm - an}{m - n} = \frac{20 \times 6 - 100 \times 1}{6 - 1} = \frac{20}{5}$ $= 4$. E per verità $\underset{96}{100 - 4} . \underset{16}{20 - 4} : : 6 . 1$.

Il che non differisce in cosa veruna dalla nona Questione del Lib. I. di Diofanto.

PROBLEMA VII.

Ritrovare un numero, che sottratto dal maggiore di due numeri dati, e aggiunto al minore, la differenza sia alla somma in ragione data.

Sia il numero che si cerca x; a e b i due numeri dati, ed a sia maggiore di b. Di più $a - x . b + x :: m . n$; dunque $an - nx = bm + mx$, ovvero, $an - bm = mx + nx$, e dividendo quest'ultima Equazione per $m + n$, averemo $x = \frac{an - bm}{m + n}$. Bisogna che an sia maggiore di bm; e perciò la ragione di a a b maggiore di quella di m ad n.

Facciasi dunque $a = 100$, $b = 20$, $m = 1$, e $n = 4$; allora $x = \frac{100 \times 4 - 20 \times 1}{1 + 4} = \frac{380}{5} = 76$. E queste sono le particolarità della Questione X. del Lib. I. di Diofanto.

PROBLEMA VIII.

Ritrovare un numero, da cui si possa sottrarre un numero dato, e che possa essere sottratto da un'altro dato numero, di modo che il primo residuo sia al secondo in ragione data.

Sia x il numero che si cerca, e $x - a . b - x :: m . n$; dunque $nx - an = bm - mx$,

ovvero $nx + mx = bm + an$, e dividendo per $n + m$, $x = \frac{bm + an}{m + n}$.

Questa risoluzione generale si può applicare al seguente Problema, di cui abbiamo parlato s. Lib. III.

Conoscendo il primo e secondo termine di una progressione Geometrica, con la somma di tutt' i suoi termini, conoscere quanti termini ha ella, e'l valore dell' ultima.

La progressione sia questa $\div\div$ 2 . 6 . . . . . . x. Non essendo noti che il primo e il secondo termine, ho segnato il luogo degli altri termini con dei punti. La somma di di tutt' i termini sia 728, e x l' ultimo termine. Ora Lib. III. numer. 92 : $x - 2 . 728 - x :: 6 - 2 . 2 :: 2 . 1$. dunque se facciasi $a = 2$, $b = 728$, $m = 2$, e $n = 1$, l'ultimo termine della progressione sarà $x = \frac{728 \times 2 + 2 \times 1}{2 + 1} = \frac{1458}{3} = 486$. Lo che si cercava.

PROBLEMA IX.

Dividere due volte un numero dato in due parti, sicchè una parte della prima divisione sia ad una parte della seconda in ragione data; e l' altra parte della seconda divisione all' altra della prima sia pure in ragione data.

Si divida due volte il numero a in due parti, in maniera che la parte maggiore della

della prima diviſione, che chiamerò z, ſia alla parte minore della ſeconda diviſione, che nominerò x, come m *ad* 1. Potevaſi ſegnare queſta ragione con due lettere, p. e. come m ad n, ma abbiamo penſato di ſervirſi di queſta come m ad 1, perchè coll' unità non accreſcendo lettere, ſi averà la riſoluzione del Problema con meno lettere; al che ſi dee ſempre porre attenzione per eſſere meno imbarazzati. La parte maggiore della ſeconda diviſione cioè $a-x$, ſia alla parte minore della prima diviſione, cioè $a-z$, in ragione di n ad 1. Dunque la prima Equazione condizionale ſarà (poichè $z.x::m.1.$) $z=mx$. Ed eſſendo $a-x.a-z::n.1.$, la ſeconda Equazione condizionale ſarà $a-x=an-nz$, ovvero $nz=an-a+x$, e dividendo per n, $z=\frac{an-a+x}{n}=mx$, ſecondo valore di z ritrovato nella prima Equazione condizionale. Dunque l' Equazione coſtitutiva ſarà $an-a+x=mnx$, e $mnx-x=an-a$, dividendo poi per $mn-1$, $x=\frac{an-a}{mn-1}$. Ma $z=mx$; dunque $z=\frac{amn-am}{mn-1}$.

Si averebbe avuta la ſteſſa riſoluzione, ſe ſi aveſſe ſegnate le parti della prima diviſione con due lettere z e y, e quelle della ſeconda con x e u; ma ſi ha penſato di fare altrimenti, per quella medeſima ragione,

che s'è segnata la ragione di queste parti come m ad 1, più tosto che come m ad n ec.

Col metodo di Diofanto.

Sia x la parte minore della seconda divisione; dunque la parte maggiore della prima divisione sarà mx, poichè suppone il Problema $mx . x :: m . 1$. Nominansi le parti della divisione *parte maggiore* e *parte minore* per distinguerle l'una dall'altra soltanto, come ha fatto Diofanto. La parte minore della prima divisione è $a - mx$; per conseguenza la parte maggiore della seconda divisione sarà $an - mnx$, perchè s'è supposto $an - mnx . a - mx :: n . 1$. Ora si aggiungano le parti della seconda divisione, e se l'eguaglino al numero dato, e s'averà la risoluzione del Problema con questa sola Equazione, $an - mnx + x = a$, cioè $mnx - x = an - a$, e dividendo per $mn - 1$, $x = \frac{an - a}{mn - 1}$. Lo che s'aveva ritrovato anche di sopra col metodo ordinario.

Se $a = 100$, $m = 2$, $n = 3$, sarà $x = \frac{100 \times 3 - 100}{2 \times 3 - 1} = \frac{200}{5} = 40$. Cioè le parti della prima divisione saranno 80 e 20; della seconda 60 e 40. Diof. Quest. XII. Lib. I.

No-

NOTA.

Non si può negare, che con questo metodo si giunge più facilmente alla risoluzione del Problema; ma bisogna anche confessare, che la posizione delle ignote, da cui dipende la facilità della risoluzione, è si studiata sulla natura del Problema, che ad esso Problema o a' Problemi simili soltanto può adattarsi. E questa è la causa, per cui (come s'è detto s. Not. II. Prob. I.) il metodo di Diofanto non è da seguire, quando il Problema ha molte condizioni, per le quali, seguendo quel metodo, converebbe studiare le posizioni in tal modo, sicchè la facilità e brevità non si otterrebbe per esso.

PROBLEMA X.

Dividere tre volte un dato numero in due parti, in maniera che una parte della prima divisione sia ad una parte della seconda in ragione data; il residuo della seconda divisione ad una parte della terza sia pure in data ragione; e il residuo della terza divisione al residuo della prima sia in data ragione ancora.

Sia dato il numero a da dividere tre volte in due parti, e 1°. la parte z della prima divisione sia alla parte y della seconda come m ad 1; dunque la prima Equazione condizionale sarà $z=my$, e $y=\frac{z}{m}$. 2°. L'altra

parte della seconda divisione che in conseguenza della supposizione prima è $a-y$, sia alla parte x della terza divisione, in ragione di n ad 1, cioè $a-y \,.\, x :: n \,.\, 1$, ovvero sostituindo il valore di y, $a-\frac{z}{m} \,.\, x :: n \,.\, 1$: dunque $a-\frac{z}{m}=nx$, e dividendo per n, $\frac{am-z}{mn}=x$. 3°. L' altra parte della terza divisione, che per la supposizione seconda diviene $a-x$, sia all'altra parte della prima divisione, che è $a-z$ per la prima supposizione, in ragione di b ad 1, cioè $a-x \,.\, a-z :: b \,.\, 1$; dunque $a-x=ab-bz$; e sostituindovi il valore di x sopra ritrovato, $a-\frac{am-z}{mn}=ab-bz$, e facendo svanire la frazione, $amn-am+z=abmn-bmnz$, ovvero $bmnz+z=abmn-amn+am$, la qual' Equazione divisa per $bmn+1$ ci dà il valore di $z=\frac{abmn-amn+am}{bmn+1}$. Dunque la parte z della prima divisione sarà $\frac{abmn-amn+am}{bmn+1}$, e la parte $a-z=a-\frac{abmn-amn+am}{bmn+1}$ $=\frac{a+amn-am}{bmn+1}$. E poichè $y=\frac{z}{m}$; dunque

$y=$

$y = \frac{abn - an + a}{bmn + 1}$, e per conseguenza $a - y = a - \frac{abmn - amn + am}{bm^2n + m} = \frac{abmna - bn + an}{bmn + 1}$.

Parimente essendo $x = \frac{am - z}{mn}$, la parte x. della terza divisione sarà, $x = \frac{am}{mn} - \frac{z}{mn} = \frac{am}{mn} - \frac{abmn - amn + am}{bm^2n^2 + mn} = \frac{abm - ab + a}{bmn + 1}$, e l'altra parte $a - x = a - \frac{abm - ab + a}{bmn + 1} = \frac{abmn - abm + ab}{bmn + 1}$. Il che si cercava.

Col metodo di Diofanto.

Sia x, parte minore della terza divisione, alla parte maggiore della seconda divisione in ragione di 1 ad n, cioè $1 . n :: x . nx$, e questo quarto termine proporzionale nx sarà il valore della parte maggiore di detta seconda divisione; dunque la parte minore della medesima divisione sarà $a - nx$, poichè tutte due sono eguali ad a.

Sia $a - nx$ alla parte maggiore della prima divisione in ragione di 1 ad m; dunque questa parte maggiore sarà $am - mnx$, perche $1 . m :: a - nx . am - mnx$; e la parte minore di detta prima divisione sarà $a - am + mnx$.

Sia

Sia finalmente $a - am + mnx$ alla parte maggiore della terza divisione in ragione di 1 ad b; la parte maggiore della terza divisione sarà dunque (poichè $1 . b :: a - am + mnx . ab - abm + bmnx .$) $ab - abm + bmnx$. Ma $ab - abm + bmnx + x = a$, ovvero $abm - ab + a = bmnx + x$, dividendo per $bmn + 1$, averemo $\frac{abm - ab + a}{bmn + 1} = x$; il che s'è ritrovato anche coll'altro metodo.

La distinzione di parte maggiore e di parte minore s'è posta per immitare del tutto Diofanto, senza veruna necessità.

Ora facciasi $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, e $b = 4$, allora diverrà $x = \frac{100 \times 4 \times 3 - 100 \times 4 + 100}{4 \times 3 \times 2 + 1} = \frac{900}{25} = 36$. Dunque le parti di queste tre divisioni saranno

Prime parti $84 + 16 = 100$.
Seconde $72 + 28 = 100$.
Terze $64 + 36 = 100$.

Cioè $84 . 28 :: 3 . 1$; $72 . 36 :: 2 . 1$; $64 . 16 :: 4 . 1$. Diofanto Quest. XIII. Lib. I.

Nota.

Da questo Problema maggiormente risulta la difficoltà d'inventare le posizioni delle ignote, secondo il metodo di Diofanto; onde di nuovo si deduce che questo metodo non è sempre da seguire, come s'è detto

to nella Nota precedente. Tuttavia, siccome abbiamo fatto ne' Problemi antecedenti, risolveremo tutt'i Problemi di Diofanto susseguenti in due maniere, colla ordinaria e con quella di Diofanto; acciocchè il Lettore rilevi dagli esempj, quali sono i casi, ne' quali l'uno de' metodi sia preferibile all'altro.

PROBLEMA XI.

Dividere un numero dato in tre parti, delle quali la prima più la seconda sieno alla terza in ragione data; e la seconda più la terza sieno alla prima in data ragione ancora.

Il numero da dividere sia a, e le parti z, y, x. La prima Equazione condizionale sarà $z+y+x=a$, ovvero $x=a-z-y$ e $y=a-z-x$. Sia $z+y \,.\, x :: m \,.\, 1$., dunque la seconda Equazione condizionale sarà $mx=z+y=z+a-z-x$, ovvero $mx+x=a$, dunque $x=\frac{a}{m+1}$. Sia ancora $y+x \,.\, z :: n \,.\, 1$, dunque la terza Equazione condizionale sarà $nz=y+x=y+a-z-y$, ovvero $nz+z=a$, dunque $z=\frac{a}{n+1}$. Ma $x+y=nz$, sostituindo i valori di x e di z sopra ritrovati, $x+y=\frac{a}{m+1}+y=\frac{an}{n+1}$; dunque $y=\frac{an}{n+1}-\frac{a}{m+1}=\frac{amn-a}{mn+m+n+1}$.

Col

Col metodo di Diofanto.

Sia la parte terza della divisione di a chiamata x, la quale alla somma delle due altre parti sia in ragione di 1 ad m; dunque la somma delle due prime parti sarà mx, perchè $1.m::x.mx$. Ma per l'ipotesi $mx+x=a$; dunque $x=\frac{a}{m+1}$, come s'è ritrovato di sopra.

Con un'altra operazione simile si ritroverà la prima parte di questa divisione, chiamandola x, e poichè alla somma delle due altre parti ella è come 1 ad n, $1.n::x.nx$; sarà dunque nx la somma delle parti seconda e terza; ma $nx+x=a$, dunque $x=\frac{a}{n+1}$, e la somma della seconda e della terza sarà per conseguenza $\frac{an}{n+1}$. La terza s'è già ritrovata colla prima operazione essere $\frac{a}{m+1}$; dunque la seconda parte sarà $\frac{an}{n+1}-\frac{a}{m+1}$. Lo che s'aveva ritrovato col primo metodo.

Supponiamo $a=100$, $m=3$ e $n=4$, sarà perciò la prima parte della divisione $\frac{a}{n+1}$ $=\frac{100}{5}$

$=\frac{100}{5}=20$; la seconda $\frac{an}{n+1}-\frac{a}{m+1}=\frac{400}{5}-\frac{100}{4}=80-25=55$; e la terza $\frac{a}{m+1}=\frac{100}{4}=25$. Diof. Quest. 22. Lib. I.

PROBLEMA XII.

Ritrovare due numeri, che sieno tra loro in data ragione e di data differenza.

Sieno questi numeri x e y, e sia $x.y::1.m$, dunque $y=mx$. Sia pure $mx-x=a$, dunque $x=\frac{a}{m-1}$.

Facciasi $m=5$; allora il maggiore dei numeri che si cercano, sarà quintuplo del minore, e la differenza di essi sarà $4x$, la quale se si fa eguale a 20, averemo $4x=20$, e $x=5$; dunque i numeri saranno 5 e 25, Diofanto Quest. 4. Lib. I.

PROBLEMA XIII.

Ritrovare due numeri tali, sicchè aggiungendo una parte dell'uno all'altro, la somma sia alla differenza in ragione data.

Sieno i numeri cercati x, e y; $x+a.y-a::m.1.$, e $y+b.x-b::n.1$. Dunque la prima Equazione condizionale sarà $x+a=my-am$; la seconda $y+b=nx-bn$, ovvero $y=nx-bn-b$, e moltiplicandola per m,

my

Parimente se dalla somma $2x+2y+2z=a+b+c$ si sottrarà il doppio della seconda Equazione, cioè $2x \quad +2z= \quad 2b$

Restarà $2y=a-b+c$

e $y=\frac{a-b+c}{2}$.

Finalmente da $2x+2y+2z=a+b+c$

Si sottri $2x+2y \quad =2a$

Resta $2z=-a+b+c$

e $z=\frac{-a+b+c}{2}$.

Ovvero.

Sia x il primo numero, e poichè il primo più il secondo si eguaglia ad a, sarà il secondo $a-x$. Per la stessa ragione, essendo il primo più il terzo eguale a b, sarà il terzo $b-x$. Ma il secondo più il terzo sono eguali a c per la terza condizione; dunque $a-x+b-x=c$, cioè $2x=a+b-c$, e $x=\frac{a+b-c}{2}$, come sopra. E colla sostituzione si ritroveranno gli altri. Questo metodo molto coincide con quello di Diofanto, del quale eccovi la rischiarazione.

Me-

Metodo di Diofanto.

Sia dei tre cercati numeri la somma del primo e del secondo eguale ad a, la somma del primo e del terzo eguale a b, la somma del secondo e del terzo eguale a c. Si nomini x la somma di tutti tre, ma la somma dei due primi è eguale ad a, dunque $x-a$ sarà il terzo. Così, poichè 1°. + 3°. $= b$, il secondo sarà $x-b$; e finalmente essendo 2°. + 3°. $= c$, il primo sarà $x-c$. Dunque $x-c+x-b+x-a=x$, ovvero $2x=a+b+c$, e $x=\frac{a+b+c}{2}$. Ma il primo $=x-c$, dunque $x-c=\frac{a+b+c-2c}{2}$ $=\frac{a+b-c}{2}$, come sopra.

Diofanto prima di risolvere questo Problema, ch'è XVI. del suo Libro primo, premette, che la metà della somma dei numeri dati sia maggiore di cadauno di essi; lo che facilmente e senza speculazione alcuna si scuopre risolvendo generalmente il Problema; imperciocchè s'è già ritrovata la metà della somma dei numeri dati eguale alla somma dei numeri che si cercano; dunque cadauno de' numeri dati ha da essere minore di essa metà, perchè i due altri restino numeri positivi.

Così se $a = 20$, $b = 30$, $c = 40$, il primo numero sarà $= \frac{20 + 30 - 40}{2} = 5$, il secondo $= \frac{20 - 30 + 40}{2} = 15$, e il terzo $= \frac{30 + 40 - 20}{2} = 25$.

PROBLEMA XV.

Ritrovare quattro numeri, i quali presi tre a tre facciano delle somme eguali a dei numeri dati.

Si chiamino i quattro numeri cercati u, x, y, z, e per la prima condizione $u + x + y = a$

per la seconda $u + x + z = b$

per la terza $u + y + z = c$

per la quarta $x + y + z = d$

Somma $3u + 3x + 3y + 3z = a + b + c + d$.

Si sottri $3u + 3x + 3y = 3a$

Resta $3z = b + c + d - 2a$

dunque $z = \frac{b + c + d - 2a}{3}$

Collo stesso metodo, si ritroverà $y = \frac{a + c + d - 2b}{3}$, $x = \frac{a + b + d - 2c}{3}$, e $u = \frac{a + b + c - 2d}{3}$.

Co

Col metodo di Diofanto.

La somma dei numeri che si cercano, si chiami x. La somma dei tre primi s'è supposta eguale ad a; dunque il quarto sarà $x-a$. Per la stessa ragione, ritroveremo il terzo eguale ad $x-b$, il secondo ad $x-c$, ed il primo eguale ad $x-a$. La somma di tutti quattro è perciò $4x-a-b-c-d=x$ per la prima supposizione; dunque $3x=a+b+c+d$, e $x=\frac{a+b+c+d}{3}$.
Ora essendo il primo numero $x-a$, dunque $x-a=\frac{b+c+d-2a}{3}$, come sopra: e così degli altri.

Da questa risoluzione generale ben si comprende, che il terzo della somma dei quattro numeri dati ha da essere maggiore di ciaschedun di essi, per la ragione detta nel problema precedente; lo che notò anche Diofanto Quest. 17. Lib. I. Facciasi dunque $a=20$, $b=22$, $c=24$, e $d=27$, e sarà il primo numero cercato $\frac{22+24+27-40}{3}=11$ ec.

PROBLEMA XVI.

Ritrovare tre numeri, i quali presi due a due sieno eguali al terzo accresciuto di un dato numero.

Sieno i tre numeri che si cercano x, y, z, e
per la prima condizione $x+y=z+a$
per la seconda $y+z=x+b$
per la terza $x+z=y+c$

Somma $2x+2y+2z=x+y+z+a+b+c$
ovvero $x+y+z=a+b+c$
si sottri $x+y=z+a$, 1.ª Equaz.

Residuo $z=b+c-z$
cioè $2z=b+c$
e $z=\frac{b+c}{2}$.

Similmente da $x+y+z=a+b+c$
si sottri $y+z=x+b$, 2.ª Equaz.

resterà $x=a+c-x$
ovvero $2x=a+c$
e $x=\frac{a+c}{2}$.

Per ultimo da $x+y+z=a+b+c$
sottrarre $x+z=y+c$, 3.ª Equ.

Residuo $y=a+b-y$
cioè $2y=a+b$
e $y=\frac{a+b}{2}$.

Col

Col metodo di Diofanto.

Sia $2x$ la somma dei tre numeri cercati. Per la prima condizione il primo più il secondo sono eguali al terzo più a, $1^{\circ}.+2^{\circ}.=3^{\circ}.+a$, e aggiuogendo il 3°. da una parte e dall'altra s'averà la soma di tutti $2x=2\times 3^{\circ}.+a$ ovvero $2x-a=2\times 3^{\circ}$.

e $\frac{2x-a}{2}=3^{\circ}$.

Con un simile raziocinio si ritroverà il secondo $=x-\frac{c}{2}$, e'l primo $=x-\frac{b}{2}$; e tutti tre assieme $=3x-\frac{a+b+c}{2}=2x$ per la prima suppofizione. Dunque $x=\frac{a+b+c}{2}$, e per conseguenza, come sopra, il 1°.num. $x-\frac{b}{2}=\frac{a+c}{2}$, il secondo $x-\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2}$, e il terzo $x-\frac{a}{2}=\frac{b+c}{2}$. Questo è il metodo della risoluzione, che dà Diofanto per la Questione 18 del suo primo Libro.

La questione 19 di detto Libro è un'altra risoluzione di questo Problema, nel modo seguente. Si chiami x il terzo numero. E poichè il primo ed il secondo sono egua-

li al terzo più a per la prima condizione del Problema; dunque $1^o. + 2^o. = x + a$. Per la seconda condizione il secondo numero più il terzo sono eguali al primo più b, si ponga per tanto in luogo del secondo la metà di $a+b$, cioè $\frac{a+b}{2}$, ed essendo $1^o. + 2^o. = x + a$, il primo numero sarà $x + a - \frac{a+b}{2} = x + \frac{a-b}{2}$. Per la terza condizione il primo con il terzo è eguale al secondo accresciuto di c, dunque $2x + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} + c$

$$\text{ovvero } 2x = b + c$$
$$\text{e } x = \frac{b+c}{2}$$

N o t a.

In questa seconda risoluzione Diofanto avanza la supposizione del secondo numero eguale ad $\frac{a+b}{2}$, senza che ciò sia dipendente dalle condizioni del Problema, e che la necessità il costringa. Imperciocchè stando sull' ipotesi, che x sia il terzo numero, sarà per conseguenza $x + a = 1^o. + 2^o.$, ovvero $2x + a = 1^o. + 2^o. + 3^o.$ Ora per la seconda condizione $2^o. + 3^o. = \text{pr.} + b$, e aggiungen-

do il primo da una parte e dall'altra, $1^o. + 2^o. + 3^o. = 2x + a = 2$ pr. $+ b$, ovvero $2x + a - b = 2$ pr., e $x + \frac{a-b}{2}$ è eguale al primo numero. Per la terza condizione, $1^o. + 3^o. = 2^o. + c$, e aggiungendo il $2^o.$ da una parte e dall'altra $1^o. + 2^o. + 3^o. = 2x + a = 2x$ sec. $+ c$, ovvero $2x + a - c = 2x$ sec., e $x + \frac{a-c}{2} =$ secondo. Dunque $1^o. + 2^o. = x + a = 2x + a - \frac{b+c}{2}$, cioè $x = \frac{b+c}{2}$, ch'è il terzo numero; e colla sostituzione si ritrovano poi i due altri come coll'altro metodo.

Facciasi $a = 20$, $b = 30$, $c = 40$, allora sarà

il primo numero $\frac{a+c}{2} = \frac{20+40}{2} = 30$.

il secondo $\frac{a+b}{2} = \frac{20+30}{2} = 25$.

il terzo $\frac{b+c}{2} = \frac{30+40}{2} = 35$.

PROBLEMA XVII.

Ritrovare quattro numeri, che uniti tre a tre superino il quarto di un numero dato.

R 4 Sie-

Sieno i numeri che si cercano u, x, y, z; e

sia
$$u+x+y=z+a$$
$$u+x+z=y+b$$
$$u+y+z=x+c$$
$$x+y+z=u+d$$

Som. $3u+3x+3y+3z=u+x+y+z+a+b+c+d$

ovvero $2u+2x+2y+2z=a+b+c+d$

e $u+x+y+z=\frac{a+b+c+d}{2}$.

Si sottrino le prime equazioni ad una ad una dalla somma dei numeri cercati, e si ritroveranno i valori di cadaun numero.

Il metodo di Diofanto non è in questo Problema dissimile da quello ch' egli adopera nella risoluzione del precedente. Il suddetto Diofanto prima di risolvere questo Problema, ch'è del suo Libro primo il XX, premette, che cadauno dei numeri dati per gl' intervalli sia minore della metà della somma di essi numeri; lo che chiaramente apparisce dalla risoluzione generale, che abbiamo data. E la ragione è la medesima che quella dei due problemi antecedenti.

PRO-

PROBLEMA XVIII.

Ritrovare tre numeri, de' quali sieno dati i prodotti presi due a due.

Si chiamino questi tre numeri x, y, z; e sia $xy = a^2$, $xz = b^2$, e $yz = c^2$. Ora poichè $xz = b^2$, sarà $z = \frac{b^2}{x}$; ed essendo $yz = c^2$, sarà ancora $z = \frac{c^2}{y}$. Dunque $\frac{b^2}{x} = \frac{c^2}{y}$, ovvero $yb^2 = c^2x$, e $y = \frac{c^2x}{b^2}$; ma nella prima Equazione $xy = a^2$, cioè $y = \frac{a^2}{x}$: dunque $\frac{c^2x}{b^2} = \frac{a^2}{x}$, e levando a questa Equazione le frazioni, $c^2x^2 = a^2b^2$, e $x^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$, per conseguenza $x = \frac{ab}{c}$.

Ritrovato il valore di x, si ritroverà colla sostituzione di questo valore le altre ignote; imperciocchè essendo $y = \frac{c^2x}{b^2}$, dunque $y = \frac{abc^2}{b^2c} = \frac{ac}{b}$. Parimente, poichè $z = \frac{b^2}{x}$, dunque $z = \frac{b^2c}{ab} = \frac{bc}{a}$.

In

In altro Modo.

La prima Equazione $xy = a^2$
La feconda $xz = b^2$
La terza $yz = c^2$

Prodotto $x^2 y^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$
e $x\,y\,z = a\,b\,c$
Si divida per $x\,y = a^2$ prima Equaz.

Quoto $z = \frac{bc}{a}$

Se fi dividerà $x\,y\,z = abc$
per $x\,z = b^2$, fec. Equaz.

Quoto $y = \frac{ac}{b}$.

Finalmente fi divida $x\,y\,z = abc$
per $y\,z = c^2$, terza Equaz.

$x = \frac{ab}{c}$, come fopra.

Ovvero.

Con un' altro metodo che molto fi approffima a quello di Diofanto, fi chiami x il primo numero ; e poichè per una condizione del Problema il primo moltiplicato nel fecondo è eguale ad a^2, dunque $\frac{a^2}{x}$ farà il fecondo. Per la fteffa ragione $\frac{b^2}{x}$ farà

rà il terzo. Ma il secondo moltiplicato nel terzo è eguale a c^2; dunque $\frac{a^2}{x} \times \frac{b^2}{x} = \frac{a^2 b^2}{x^2} = c^2$, ovvero $a^2 b^2 = c^2 x^2$, e $x^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$, per conseguenza $x = \frac{ab}{c}$, come sopra.

PROBLEMA XIX.

Ritrovare tre numeri, de' quali il primo sia eguale al secondo accresciuto di una data parte del terzo; il secondo eguale al terzo fatto maggiore di una parte simile del primo, e'l terzo sia eguale ad una simile parte del secondo più un dato numero.

Sieno i numeri ricercati x, y, z; e sia la prima Equazione condizionale $x = y + \frac{z}{n}$, la seconda $y = z + \frac{x}{n}$, e la terza $z = \frac{y}{n} + a$. Sostituindo la prima Equazione nella seconda, $y = z + \frac{y}{n} + \frac{z}{n^2}$, ovvero facendo svanire le frazioni, $n^2 y = n^2 z + ny + z$, e $n^2 y - ny = n^2 z + z$; onde dividendo per $n^2 - n$, diverrà $y = \frac{n^2 z + z}{n^2 - n}$. Ora si sostituisca questa ultima Equazione nella terza, e $z = \frac{y}{n} + a$

$+a=\frac{n^2z+z}{n^3-n^2}+a=\frac{n^2z+z+an^3-an^2}{n^3-n^2}$, ovvero $n^3z-n^2z=n^2z+z+an^3-an^2$, e $n^3z-2n^2z-z=an^3-an^2$, cioè $z=\frac{an^3-an^2}{n^3-2n^2-1}$. Colla sostituzione si ritroveranno poi gli altri numeri.

Metodo di Diofanto.

Sia nz il numero medio (per servirsi della distinzione medesima, che usa Diofanto Quest. XXIII. Lib. I.) e poichè per ipotesi il minore è eguale al medio diviso per n più a, questo numero minore sarà $z+a$. Ora per la seconda Equazione condizionale la differenza del medio dal minimo è eguale al maggiore diviso per n; questa differenza è $nz-z-a$, dunque $n^2z-nz-an$ sarà il numero maggiore. Per la prima Equazione la differenza del maggiore dal medio è eguale al minimo diviso per n, dunque $n^2z-nz-an-nz$, cioè $n^2z-2nz-an=\frac{z+a}{n}$, sicchè $n^3z-2n^2z-an^2=z+a$ e $n^3z-2n^2z-z=an^2+a$, per conseguenza $z=\frac{an^2+a}{n^3-2n^2-1}$. Ma il minore è $z+a$; dunque il minore $z+a=\frac{an^2+a}{n^3-2n^2-1}+a=\frac{an^3-an^2}{n^3-2n^2-1}$,

come

come sopra. E il medio ch'è $nz = \frac{an^3 + an}{n^3 - 2n^2 - 1}$

Parimente il maggiore sarà $\frac{an^3 + an}{n^3 - 2n^2 - 1}$

$+ \frac{an^2 - an}{n^3 - 2n^2 - 1} = \frac{an^3 + an^2}{n^3 - 2n^2 - 1}$.

Bisogna che n sia maggiore di 2; imperciocchè s'egli fosse eguale a 2, il denominatore di questa frazione sarebbe -1, e perciò z un numero negativo; lo che sarebbe contrario a quel che si cerca.

Facciasi dunque $a = 10$, e $n = 3$, in tal caso

il maggiore $\frac{an^3 + an^2}{n^3 - 2n^2 - 1} = \frac{270 + 90}{8} = 45$.

il medio $\frac{an^3 + an}{n^3 - 2n^2 - 1} = \frac{270 + 30}{8} = 37\frac{1}{2}$.

il minore $\frac{an^3 - an^2}{n^3 - 2n^2 - 1} = \frac{270 - 90}{8} = 22\frac{1}{2}$.

Diof. Quest. 23. e 24. Lib. I.

PROBLEMA XX.

Ritrovare quanti si voglia numeri, che sieno in proporzione continua tra loro, e che uniti assieme facciano una data somma.

Questo problema ha due casi; 1°. quando

do la proporzione è aritmetica, 2°. se la proporzione è geometrica.

Primo Caso.

Sia a la somma data, e d sia la differenza che regna nella proporzione. Se si vogliono ritrovare due soli numeri, e il primo si chiami x, il secondo sarà $x+d$ e perciò $x+x+d=a$, ovvero $2x=a-d$, e $x=\frac{a-d}{2}$. Se i numeri ricercati saranno tre, e il primo sia x come sopra, sarà il secondo $x+d$, e il terzo $x+2d$, per conseguenza $3x+3d=a$, ovvero $3x=a-3d$, e $x=\frac{a-3d}{3}$. Se saranno quattro, $x=\frac{a-6d}{4}$; se cinque $x=\frac{a-10d}{5}$: e generalmente per qualunque numero, x sarà eguale alla somma a diminuita dalla differenza moltiplicata per la somma de' tanti numeri naturali, quanti sono i numeri che si cercano, e questa somma poi così diminuita divisa per il numero dei termini. I numeri naturali sono questi $\div$ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ec. Ora se si chiama m qualunque numero di termini di questa progressione naturale, sarà $m-1$ il termine di detta progressione a questo numero corrispondente

dente. Ma L. III. n. 30. la ſomma di qualunque numero di termini di una progreſſione aritmetica è eguale alla ſomma del primo e dell' ultimo moltiplicata per la metà del numero dei termini; dunque in queſto caſo ſarà la ſomma eguale a $\frac{m^2 - m}{2}$. Perciò il primo termine x di una progreſſione aritmetica ſarà ſempre eguale ad $\frac{2a - m^2 d + md}{2m}$. Si cerchino p. e. cinque termini, e $a = 40$, $d = 3$, e per queſta ultima ſuppoſizione $m = 5$, per conſeguenza ſarà $x = \frac{80 - 75 + 15}{10} = 2$.

Secondo Caſo.

Sia parimenti a la ſomma data, e l' eſponente della ragione geometrica ſia come a a b. Se ſi cercano due ſoli termini, e il primo ſi chiami x, il ſecondo ſarà $\frac{bx}{a}$, e perciò $x + \frac{bx}{a} = a$, cioè $ax + bx = a^2$, e $x = \frac{a^2}{a + b}$. Se ſi vogliono ritrovare tre termini, il terzo ſarà $\frac{b^2 x}{a^2}$, e tutti tre $x + \frac{bx}{a} + \frac{b^2 x}{a^2} = a$, cioè $x = \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2}$; ſe ſe ne deſiderano quattro

$x =$

$x = \frac{a^4}{a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3}$: e finalmente se si vuole ritrovare qualsivoglia numero di termini, il primo x sarà eguale alla somma di tutt' i termini, innalzata al grado di potenza eguale al numero dei termini che si cercano, cioè, se il numero dei termini ricercati si chiama m, eguale ad a^m, divisa poi per tutt' i termini della potenza $m-1$ di $a+b$, diminuiti dei loro coefficienti, cioè tali quali si ritrovano nella Tavola del Lib. IV. num. 23.

P. e. si cercano quattro termini, diverrà $m = 4$; sia poi $a = 30$, e $b = 60$, allora sarà $x = \frac{810000}{27000 + 54000 + 108000 + 216000} = 2$.

PROBLEMA XXI.

Dati due numeri ritrovarne un' altro, che moltiplicato per uno di essi sia eguale al quadrato del prodotto di esso nell' altro.

Sieno i due numeri dati a e b, e'l terzo che si cerca x, e $ax = b^2 x^2$; dunque $a = b^2 x$, e $x = \frac{a}{b^2}$.

Questa è la Quest. 29. del Libro primo di Diofanto, risoluta da esso nel medesimo modo.

Se $a = 200$, $b = 5$, sarà $x = \frac{200}{25} = 8$.

PRO-

PROBLEMA XXII.

Ritrovare due numeri, la somma de' quali sia eguale ad un numero dato e'l prodotto eguale parimente ad un numero dato.

Sieno questi due numeri x e y, e $x+y=a$ perciò $x=a-y$. Parimente $xy=b$, ovvero sostituindo in questa Equazione il valore di x sopra ritrovato, $ay-yy=b$, e $yy-ay=-b$, aggiungasi $\frac{1}{4}aa$, per la ragione detta nella Sezione precedente, e s'averà $yy-ay+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-b$, ovvero $y-\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$, e $y=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$. Onde poichè $x=a-y$, sarà $x=a-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$.

Col metodo di Diofanto.

Sia la differenza dei due numeri cercati $2x$, e la loro somma $2a$; dunque i due numeri saranno $a+x$, e $a-x$. Il prodotto di detti due numeri sarà $a^2-x^2=b$, per conseguenza $a^2-b=x^2$, e $\sqrt{a^2-b}=x$.

Per avere la risoluzione in numeri razionali, bisogna che il quadrato della metà della somma dei due numeri sia maggiore di un quadrato del prodotto di detti due numeri, come premette Diofanto Quest. 30. Lib. I. e chiaramente apparisce dalla risoluzione generale.

Se dunque $a=10$, può essere $b=96$,

e farà $x = \sqrt{100 - 96} = 2$; E i due numeri 12 e 8.

PROBLEMA XXIII.

Ritrovare due numeri, de' quali sia data la differenza, e sia il prodotto eguale ad un numero dato.

Questo Problema con i tre susseguenti risolveremo col metodo di Diofanto solamente, giacchè le posizioni delle ignote sono simili tanto nel metodo ordinario che in quello di Diofanto.

Sia la differenza di questi due numeri a, e il loro prodotto $= b$; dunque $x + \frac{1}{2}a$, e $x - \frac{1}{2}a$ faranno i due numeri che si cercano. Ma il prodotto di questi due numeri $x^2 - \frac{1}{4}aa = b$; dunque $4x^2 = 4b + a^2$, e per conseguenza $2x = \sqrt{4b + a^2}$, e $x = \frac{1}{2}\sqrt{4b + a^2}$.

Bisogna però, che il quadruplo del prodotto più il quadrato della differenza sia un numero quadrato, perchè si possa avere una risoluzione in numeri razionali, come ha notato Diofanto Quest. 33. Lib. I.

Facciasi dunque $a = 4$, e $b = 96$, allora $x = \frac{1}{2}\sqrt{384 + 16} = 10$; e i due numeri 12 e 8.

PRO-

PROBLEMA XXIV.

Ritrovare due numeri tali; sicchè la somma di essi e la somma dei loro quadrati sieno eguali a due numeri dati.

Sieno questi due numeri $a+x$, e $a-x$; il quadrato
del primo sarà $a^2+2ax+xx$
del secondo $a^2-2ax+xx$

Somma $2a^2 \quad * + 2x^2$

La somma di questi due quadrati sia eguale a b, dunque $2a^2+2x^2=b$, e $x^2=\frac{1}{2}b-a^2$, perciò $x=\sqrt{\frac{1}{2}b-a^2}$, ovvero $x=\sqrt{\frac{2b-4a^2}{4}}$.

Bisogna dunque, che la metà della somma dei quadrati sia maggiore di un quarto di quel che sia il quadrato della somma dei numeri; come premette Diofanto Quest. 31. Lib. 1. per avere razionali i numeri di questa risoluzione.

Facciasi per tanto $a=10$, e $b=208$, sarà allora $x=\sqrt{104-100}=2$; ovvero $x=\sqrt{\frac{416-400}{4}}=2$. E i due numeri saranno 12 e 8.

PROBLEMA XXV.

Ritrovare due numeri, la somma de' quali e la differenza dei loro quadrati sieno eguali a due numeri dati.

Sieno i due numeri, come nel precedente Problema $a+x$, e $a-x$; i loro quadrati saranno dunque

Primo $a^2+2ax+x^2$
Secondo $a-2ax+x^2$

Differenza $4ax=b$

Dunque $x=\frac{b}{4a}$.

Se si farà $a=10$, e $b=80$, sarà $x=\frac{80}{40}=2$, e i due numeri diverranno 12 e 8, come nella Quest. 32. Lib. I. di Diofanto.

PROBLEMA XXVI.

Ritrovare due numeri, che sieno tra loro in data ragione, e la somma di essi alla somma dei loro quadrati sia pure in ragione data.

Questi due numeri sieno in ragione di 1 ad m, dunque se il primo si chiama x, il secondo sarà mx, la somma di essi $x+mx$, e la somma dei loro quadrati $x^2+m^2x^2$. Sia pure la somma di essi $x+mx$ alla somma dei loro quadrati $x^2+m^2x^2$ come 1 ad n, dunque $nx+mnx=x^2+m^2x^2$ ovvero $n+mn=x+m^2x$, e dividendo per $1+m^2$, sarà x =

$= \frac{n+mn}{1+m^2}$. Sicchè questi due numeri faranno $\frac{n+mn}{1+m^2}$ e $\frac{nm+m^2n}{1+m^2}$.

Suppongasi $m=3$, e $n=5$, allora sarà $\frac{n+mn}{1+m^2}$ $=2$, e $\frac{nm+m^2n}{1+m^2}=6$. Diof. Quest. 33. Lib. 1.

Le altre otto Questioni susseguenti di Diof. sono a questa molto uniformi, sicchè si lasciano per non moltiplicare i fogli di questa operetta senza necessità.

PROBLEMA XXVII.

Dati due numeri, ritrovarne un' altro, sicchè questi tre numeri presi due a due e moltiplicati nel terzo, facciano tre prodotti in progressione Aritmetica.

Sieno dati i numeri a e b, e'l terzo che si cerca sia x, i tre prodotti saranno dunque $ab+bx$, $ab+ax$, $ax+bx$. Ora questo Problema può avere tre risoluzioni,

I. Sia $ax+bx$ medio, perciò $\div ab+ax . ax+bx . ab+bx$.

dunque $2ab+ax+bx = 2ax+2bx$.

cioè $2ab = ax+bx$

e $\frac{2ab}{a+b} = x$

Se $a=3$, e $b=5$, sarà $x \frac{2 \times 3 \times 5}{3+5} = \frac{15}{4}$.

II.

II. Sia $ax+bx$ primo, perciò $\div ax+bx.ab+ax.ab+bx$.

$$\text{Dunque} \quad ax+2bx+ab=2ab+2ax$$
$$\text{cioè} \quad 2bx = ab+ax$$
$$\text{e} \quad 2bx-ax = ab$$
$$x=\frac{ab}{2b-a}.$$

In questo secondo caso bisogna, che $2b$ sia maggiore di a; e rimanendo le supposizioni di sopra, $x=\frac{15}{7}$.

III. Sia $ax+bx$ ultimo $\div ab+ax.ab+bx.ax+bx$.

$$\text{dunque} \quad ab+2ax+bx=2ab+2bx$$
$$\text{cioè} \quad 2ax-bx= ab$$
$$\text{e} \quad x=\frac{ab}{2a-b}.$$

In questo terzo caso bisogna che $2a$ sia maggiore di b; stando dunque colle supposizioni di sopra $x=15$. Diof. Quest. ultima del Lib. 1.

CAP. II.

Problemi semplici Indeterminati.

PROBLEMA XXVIII.

Ritrovare due numeri, sicchè la loro somma sia alla loro differenza in ragione data.

Sieno i due numeri cercati $x+y$, e $x-y$, sarà la somma di essi $2x$, e la differenza $2y$. Sia parimente $2x.2y$ ovvero $x.y::m.1$; dunque $x=my$.

Sic-

Siccome ne' Problemi Determinati si traggono dalle Equazioni le restrizioni o limiti delle grandezze note, acciocchè il Problema sia espresso ne'termini del possibile; così ne' Problemi indeterminati si procurano di rilevate i limiti delle grandezze ignote, che deono essere a piacere determinate, per avere la risoluzione del Problema in numeri positivi, perchè tali appunto vengo sempre ricercati.

In questo Problema che ha la sola Equazione $x=my$, non vi sono da osservare restrizione veruna delle grandezze ignote; sicchè facendo $m=3$, l'Equazione del problema diverrà $x=3y$. Ora si determini a piacere y p. e. $y=2$, sarà tosto $x=6$; ovvero se si fa $x=3$, sarà per conseguenza $y=1$ ec.

PROBLEMA XXIX.

Ritrovare due numeri, il prodotto de' quali sia alla loro somma, ovvero alla loro differenza, in ragione data.

Primo Caso.

I due numeri ricercati sieno x e y; e xy. $x+y::m.1$, dunque $xy=mx+my$. Se si vuole determinare l'ignota x, si sottri prima mx da una parte e dall'altra della Equazione, e resterà $xy-mx=my$, ovvero

 $x=$

$x = \frac{my}{y-m}$. Dal che si rileva che y bisogna sia maggiore di m.

E se si vuol determinare y, si sottri my da una parte e dall' altra della Equazione del Problema, e s'averà $xy - my = mx$, ovvero $y = \frac{mx}{x-m}$; dunque bisogna, che x sia maggiore di m.

I. Supponiamo $m=3$, e $x=4$; allora $y=12$. Lo che non differisce dalla Quest. 14. Lib. I. di Diofanto, ch' egli risolve col seguente metodo.

Sia x una delle grandezze ignote, e l'altra, poichè ha ella da essere maggiore di m, sia $m+n$; dunque $mx+nx \, . \, x+m+n :: m \, . \, 1$, e $mx+nx = mx+m^2+mn$, ovvero $nx = m^2+mn$, e $x = \frac{m^2+mn}{n} = \frac{m^2}{n}+m$; dal che chiaramente apparisce, che x ha da essere maggiore di m, come s'è veduto di sopra. Ora supposto $m=3$, e $n=9$; sarà la seconda grandezza che si cerca 12, e la prima $x = \frac{9+27}{9} = 4$.

II. Supponiamo $m=6$, e $y=9$; allora $x = \frac{my}{y-m} = \frac{54}{3} = 18$. Questa è la Quest. 3. Lib. II. di Diofanto, risoluta da lui in questo modo.

Sia

Sia x una delle due grandezze ignote, e l'altra nx. Sia parimente $nx^2 . x+nx :: m . 1.$, ovvero $nx . 1+n :: m . 1$; dunque $nx = m+mn$, e $x = \frac{m+mn}{n}$. Se $n=2$, e (come ſopra) $m=6$; ſarà $x = \frac{6+12}{2} = 9$, e $nx=18$.

Secondo Caſo.

Sieno come nella prima ſuppoſizione i due numeri cercati x e y; e ſuppoſto x maggiore di y, $xy . x-y :: m . 1$ dunque $xy = mx - my$, ovvero $xy + my = mx$, e $y = \frac{mx}{x+m}$.

Se $m=6$, e facciaſi $x=6$; ſarà $y = \frac{6 \times 6}{6+6} = 3$.

Ovvero ſe ſi deſidera determinare a piacere y, poichè $xy = mx - my$; ſi aggiunga $my - xy$ da una parte e dall'altra, e s'averà $my = mx - xy$, cioè $\frac{my}{m-y} = x$. Biſogna dunque, che y ſia eguale o minore di m.

Sia $m=6$, e ſuppongaſi $y=3$, allora ſarà $x = \frac{6 \times 3}{6-3} = 6$.

Queſto è il ſecondo caſo del Problem. 3. del Lib. II. di Diofanto, riſoluto da lui nel modo ſeguente.

Sia

Sia x uno dei numeri che si cercano, e nx l'altro; sia parimente $nx^2 . nx - x :: m . 1$.

ovvero $nx . n - 1 :: m . 1$.

dunque $nx = mn - m$

$$\text{e } x = \frac{mn - m}{n} = m - \frac{m}{n}.$$

Dal che si rileva, che la parte più picciola x ha da essere minore di m, come sopra.

PROBLEMA XXX.

Ritrovare tre numeri, la somma de' quali sia eguale ad un dato numero, e la somma dei predotti di cadauno di essi moltiplicato per un certo numero, sia pure eguale ad un numero dato.

I tre numeri che si cercano sieno x, y, z, e $x + y + z = a$; parimente $mx + ny + z = b$. Per la prima equazione $x = a - y - z$, e per conseguenza $mx = am - my - mz$. Ora si sostituisca questa ultima equazione nella seconda, e s' averà $am - my + ny - mz + z = b$, ovvero (se si vuol cercare il limite di z) $am - b - mz + z = my - ny$. Bisogna però, che am sia maggiore di b, ed m maggiore di n. Dunque $\frac{am - b - mz + z}{m - n} = y$; e poichè y ha da essere una grandezza positiva, dunque $am - b$ sarà maggiore di $mz - z$, per conseguenza $\frac{am - b}{m - 1}$ maggiore di z.

Si

Si sostituisca nella prima Equazione il ritrovato valore di y, e averemo $x = a - z - \frac{am - b - mz + z}{m - n}$ cioè $x = \frac{am - an - mz + nz - am + b + mz - z}{m - n} = \frac{b - an + nz - z}{m - n}$.

Se $b - an$ è una grandezza negativa, $nz - z$ sarà maggiore $an - b$, e z maggiore di $\frac{an - b}{n - 1}$

Se poi $b - an$ fosse una grandezza positiva, allora il numero z avrebbe il solo limite ritrovato di sopra, cioè dovrebbe solamente essere minore di $\frac{am - b}{m - 1}$.

Quando il Problema ha più di una Equazione, si cercano sempre in tutte le sue Equazioni i limiti del più e del meno, di quelle grandezze che si vogliono a piacere determinare; così in questo Problema, che ha due Equazioni, abbiamo indagato in tutte queste due Equazioni tra quali grandezze può essere determinato il numero z, acciocchè nel tempo stesso gli altri numeri rimangano positivi; lo che meglio si comprenderà col seguente Esempio.

Un uomo ha distribuito 100 libbre a tre sorta di Persone; alla prima sorta 8 per una; alla seconda 5, e alla terza 1, e le Persone sono state 30. Si dimanda quante sono state per cadauna specie?

Siano queste tre specie di Persone x, y, z.

La

La prima Equazione condizionale farà $x+y+z=30$; la feconda $8x+5y+z=100$.

Facciafi $a=30$, $b=100$, $m=8$, $n=5$, averemo per la rifoluzione generale di fopra, $y=\frac{am-b-mz+z}{m-n}=\frac{30\times8-100-8z+z}{8-5}$ $=\frac{140-7z}{3}$ dunque $7z$ faranno minori di 140, cioè z minore di 20. Parimente $x=\frac{b-an+nz-z}{m-n}=\frac{100-150+5z-z}{8-5}$ $=\frac{4z-50}{3}$; dunque $4z$ faranno maggiori di 50, e z maggiore di $12\frac{1}{2}$. Orà fi fupponga $z=13$, diverrà $y=16\frac{1}{3}$, e $x=\frac{2}{3}$; ma questi numeri di z, di y, e di x hanno da effere intieri, perchè determinano numero di Perfone, così la fuppofizione di $z=13$ non è conveniente alla natura del Problema. Diafi un' occhiata alla feguente Tavola.

Ta-

Tavola dei Limiti.

z	13	14	15	16	17	18	19
y	$16\frac{1}{3}$	14	$11\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$	7	$4\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
x	$\frac{2}{3}$	2	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	6	$7\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$

Da questa Tavola si rileva facilmente, che z ha da avere due sole supposizioni, o $z = 14$, o $z = 17$, acciocchè le due altre grandezze ignote divengano eguali a numeri intieri, come la natura del Problema il richiede.

PROBLEMA XXXI.

Ritrovare tre numeri tali, che certe parti del primo più certe parti del secondo, sieno eguali alle restanti del secondo più una certa parte del terzo ed ancora eguali alle rimanenti del terzo più le restanti del primo.

Sieno x, y, z, queste tre grandezze; le certe parti della prima c, e quelle della seconda d, le rimanenti della seconda f, ed e le certe parti della terza; e finalmente le restanti della terza sieno b, e g le rimanenti della prima. Poichè le lettere segnano indifferentemente qualunque sorta di grandezza o numero; così nel nostro caso le lettere c, d, f, e, b, g, indicheranno numeri rotti. Dunque per prima Equazione condi-

condizionale $cx+dy=ez+fy$, e $x=\frac{ez+fy-dy}{c}$; per seconda Equazione condizionale $cx+dy=gx+hz=ez+fy$, ovvero $gx=ez+fy-hz$, e $x=\frac{ez+fy-hz}{g}=\frac{ez+fy-dy}{c}$, ovvero $cez+cfy-chz=egz+fgy-dgy$, cioè $cfy+dgy-fgy=egz+chz-cez$, e per conseguenza $z=\frac{cfy+dgy-fgy}{eg+ch-ce}$.

Si sostituisca questo valore di z nella prima Equazione condizionale, e s' averà $x=\frac{dey+fhy-dhy}{eg+ch-ce}$. Ora poichè tanto nel valore di z che in quello di x tutt' i termini contengono l' altra ignota y, di modo che non potendosi compararla a grandezze note, non si può rilevare tra quali limiti conviene restringere il suo valore; perciò se si desidera determinarla a piacere, come richiede la natura del Problema, facciasi y eguale a qualunque numero positivo, e s' averà il Problema risoluto.

Il P. Prestet ha posto questo Problema e i tre consecutivi nella Classe dei Problemi determinati, imperciocchè non mancandovi che una Equazione per far che sieno determinati, ha supposte le grandezze o numeri ignoti, eguali ad una grandezza nota a. Ora per questa ultima condizione $x+y+z=a$, e sostituindovi i valori di x e di z so-

sopra ritrovati, s' averà $\frac{dey+fby-dby}{eg+cb-ce}$ $+\frac{cfy+dgy-fgy}{eg+cb-ce}+y=a$: e riducendo y sotto il denominatore comune $eg+cb-ce$, ritroveremo $\frac{dey+fby-dby+cfy+dgy-fgy}{eg+cb-ce}$ $+\frac{egy+cby-cey}{eg+cb-ce}=a$, ovvero $dey+fby$ $-dby+cfy+dgy-fgy+egy+cby-cey$ $=aeg+acb-ace$, per conseguenza y $=\frac{aeg+acb-ace}{de+fb-db+cf+dg-fg+eg+cb-ce}$.

Sostituindo questo valore di y nelle Equazioni di x e di z, ritroveremo x $=\frac{ade-adb+afb}{eg+cb-ce+cf+dg-fg+de-db+fb}$, z $=\frac{adg+acf-afg}{eg+cb-ce+cf+dg-fg+de-db+fb}$.

Se si suppone $a=15$, $c=\frac{1}{5}$, $d=\frac{3}{4}$, $e=\frac{4}{5}$, $f=\frac{1}{4}$, $g=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, ritroveremo $x=6$, $y=4$ e $z=5$; ed averemo le supposizioni e la risoluzione medesima della Questione 25. Lib. I. di Diofanto, il quale la risolve nel seguente modo.

Si serviremo delle cifre per le grandezze note,

note, come ha fatto Diofanto, acciocchè questa risoluzione ch'è alquanto implicata, riesca più facile (lo che molte volte sarà vantaggioso seguire), e perchè risalti maggiormente l'artefizio di Diofanto.

Il primo numero, che ha da essere diviso per 3, sia $3x$, e'l secondo che si suppone che abbia da essere diviso per 4, sia qualunque numero noto divisibile per 4, p. e. 4; imperciocchè si prende sempre i numeri minori contenenti le condizioni, che desiderano. Per la prima condizione il terzo del primo più tre quarti del secondo saranno $x+3$, e ciò ha da essere eguale, per la terza condizione, a $2x$ residuo del primo più il residuo del terzo. Ora per far che $2x$ restino eguali a $x+3$, bisogna aggiungervi $3-x$, imperciocchè $2x+3-x=x+3$; dunque $3-x$ sarà il residuo del terzo, cioè per la supposizione di sopra un quinto del terzo, e $15-5x$ sarà eguale all'intiero terzo. Per la seconda condizione $\frac{4}{5}$ del terzo più un quarto del secondo sono eguali ad $x+3$, dunque $12-4x+1=x+3$, per conseguenza $5x=10$, e $x=2$. Dunque il primo numero $3x=6$, il secondo 4, e'l terzo $15-5x=5$, come sono stati ritrovati coll'altro metodo.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

Ritrovare quattro numeri u, x, y, z *tali che alcune parti del primo* u *più alcune del secondo* x *sieno eguali alle rimanenti del secondo più alcune parti del terzo* y, *ed ancora eguali alle restanti del terzo più alcune parti del quarto* z, *e parimente eguali alle rimanenti del quarto più le rimanenti del primo*.

Di questo Problema, ch' è il 26. del L. I. di Diofanto, si ha la risoluzione, tanto col metodo Cartesiano, quanto con quello di Diofanto, operando nella medesima maniera, come nel precedente, poichè è similissimo ad esso.

PROBLEMA XXXIII.

Ritrovare tre numeri tali, che il primo più certe parti della somma dei due altri, sieno eguali al secondo più certe diverse parti della somma dei due altri, ed ancora eguali al terzo più altre differenti parti della somma degli altri due.

Sieno i tre numeri cercati x, y, z; la frazione c segni le parti della somma del secondo e del terzo, la frazione d determini quelle della somma del primo e del terzo, e la frazione e quelle della somma del primo e del secondo. Per la prima condizione $x+cy+cz=y+dx+dz$, ovvero

$x - dx = y + dz - cy - cz$, e per conseguenza $x = \frac{y + dz - cy - cz}{1 - d}$. Per la seconda condizione $x + cy + cz = z + ex + ey$, ovvero $x - ex = z + ey - cy - cz$, cioè $x = \frac{z + ey - cy - cz}{1 - e} = \frac{y + dz - cy - cz}{1 - d}$; e levando le frazioni s'averà $z + ey - cy - cz - dz - dey + cdy + cdz = y + dz - ey - cz - ey - dez + cey + cez$, ovvero $z - 2dz + cdz - cez + dez = y - 2ey + cey + dey - cdy$.

Questa è l'ultima Equazione, a cui s'abbia potuto pervenire dopo tutte le sostituzioni, che la natura del Problema ci ha permesso di fare, e poichè in essa due sono le ignote z e y, bisogna in una di queste determinarla a piacere, per risolvere il Problema. Ovvero col metodo del Padre Prestet facciasi $x + y + z = a$. Ma di sopra s'è ritrovato che $y = \frac{z + cdz + dez - cez - 2dz}{1 + ce + de - cd - 2e}$, il qual valore di y sostituito nel valore di x ritrovato per la seconda Equazione, ci darà $x = \frac{z + cdz + cez - dez - 2cz}{1 + ce + de - cd - 2e}$, dunque $x + y + z = \frac{z + cdz + cez - dez - 2cz}{1 + ce + de - cd - 2e}$

+

$$+\frac{z+cdz+dez-cez-2dz}{1+ce+de-cd-2e}+z=$$

$$\frac{3z+cez+cdz+dez-2cz-2dz-2ez}{1+ce+de-cd-2e}=a,$$

ovvero $3z+cez+cdz+dez-2cz-2dz-2ez=a+ace+ade-acd-2ae$, e z

$$=\frac{a+ace+ade-acd-2ae}{3+ce+cd+de-2c-2d-2e}.$$

Sostituindo questo valore nell'Equazioni di x e di y, averemo $x=\frac{a+acd+ace-ade-2ac}{3+ce+cd+de-2c-2d-2e}$

e $y=\frac{a+acd+ade-ace-2ad}{3+ce+cd+de-2c-2d-2e}$.

Si supponga $a=49$, $c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{4}$, ed $e=\frac{1}{5}$, in tal caso diverrà $x=13$, $y=17$, e $z=19$; e questa è la Questione 27. del Libr. I. di Diofanto, di cui eccovi la risoluzione in cifre, ch'è molto elegante.

Sia il primo dei tre numeri cercati x, e la somma dei due altri 3 (giacchè si ha da prendere il terzo di essi per unire al primo); per conseguenza la somma di tutti tre $x+3$. Per la supposizione il primo più il terzo dei due altri è eguale a $x+1$, e per la prima condizione $x+1$ è eguale al secondo più un quarto dei due altri, dunque $4x+4$ = quattro volte il secondo più la somma dei due altri. Ora si sottri da $4x+4$

 la

la somma di tutti tre, cioè $x+3$, e 'l residuo $3x+1$ sarà eguale a tre volte il secondo, dunque il secondo sarà $x+\frac{1}{3}$. Per la stessa ragione $5x+5=$ cinque volte il terzo più la somma dei due altri; dunque se da $5x+5$ si leverà $x+3$, somma di tutti, il residuo $4x+2$ conterrà quattro volte il terzo, e per conseguenza il terzo sarà $x+\frac{1}{2}$. Dunque $x+x+\frac{1}{3}+x+\frac{1}{2}=x+3$, ovvero $2x=3-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$, e $x=\frac{13}{12}$, il secondo ch'è $x+\frac{1}{3}=\frac{17}{12}$, e 'l terzo $x+\frac{1}{2}=\frac{19}{12}$; ovvero in numeri intieri, il primo 13, il secondo 17, e 'l terzo 19.

Nota.

Quando il Problema contiene molte frazioni, e la risoluzione generale sia molto difficile, allora espediente sarà servirsi delle cifre per avere una risoluzione particolare. Si cercherà il numero più piccolo, che possa essere diviso dai denominatori delle frazioni espresse nel Problema; (a) e si farà uso di questo numero per denominare l'ignote, secondo che le condizioni del Problema stes-

so

(a) Il numero più picciolo che possa essere diviso da due numeri dati si ritrova operando nel seguente modo.

Sia p. e. a e b i due numeri dati, ed m, n i due più piccioli numeri che possano esprimere la ragione di a e b. Facciasi un'analogia, $a \,.\, b ::$

m.

so richiedono. Per es. prendasi il Problema sopradetto, in cui sieno espressi per denominatori delle frazioni i numeri 3, 4, e 5. Il numero più piccolo, che divide senza residuo questi tre numeri, è il 60; dunque le tre grandezze che si cercano, si chiamino $60x$, $60y$, e $60z$. Per le condizioni del Problema $60x + 20y + 20z = 60y + 15x + 15z$, ovvero $45x + 5z = 40y$, e per conseguenza $9x + z = 8y$, cioè $z = 8y - 9x$.

T 3 Pa-

$m.n.$; perciò $an = bm$, e l'uno o l'altro di questi prodotti sarà il numero che si cerca. Imperciocchè chiaramente apparisce, che an ovvero bm è misurato senza residuo tanto da a che da b; ch'egli sia poi il minimo, lo provo così.

Sia f minore di an ovvero di bm misurato senza residuo da a e da b, cioè a col mezzo di d e b col mezzo di c; dunque $ad = f = bc$, e perciò $a.b :: c.d :: m.n$, dunque m ed n sono i minimi termini della ragione di c a d, per conseguenza m misura giustamente c, e n misura d: ma $an.ad :: n.d.$, dunque an misura $ad = f$, lo che è assurdo.

Se a e b sono numeri primi, loro stessi (come s'è detto) sono esponenti di sua ragione; onde in tal caso $a = m$, e $b = n$, e 'l numero minore da loro misurato giustamente sarà ab.

Se i numeri dati fossero tre, e si cercasse il più picciolo numero che fosse da essi misurato senza residuo; allora bisognerebbe prima de' due primi cercare un tal numero colla regola di sopra accennata, poi colla medesima regola di questo ritrovato numero e del terzo dato ritrovare il più picciolo numero commensurabile da loro senza residuo, e il Problema sarebbe sciolto.

Parimente $60x + 20y + 20z = 60z + 12x + 12y$, ovvero $48x + 8y = 40z$; e dividendo per 8, $6x + y = 5z$, cioè $z = \frac{6x+y}{5} = 8y - 9x$, e facendo svanire la frazione, $6x + y = 40y - 45x$, ovvero $51x = 39y$, e $x = \frac{39}{51}y$. Si sostituisca questo valore di y nell' Equazione di z, e si ritroverà $z = \frac{6x+y}{5} = \frac{57}{51}y$. Ora per progredire secondo il metodo del P. Prestet facciasi $x + y + z = \frac{39}{51}y + \frac{51}{51}y + \frac{57}{51}y = \frac{147}{51}y = 49 = \frac{2499}{51}$; si divida poi 2499 per 147, e'l quoto 17 sarà il valore di y, come sopra ec.

PROBLEMA XXXIV.

Ritrovare quattro numeri u, x, y, z *tali*, sicchè $u + \frac{x+y+z}{3} = x + \frac{u+y+z}{4} = y + \frac{u+x+z}{5} = z + \frac{u+x+y}{6}$.

Questa è la Quest. 28. del Lib. I. di Diofanto, la di cui risoluzione è simile a quella della precedente; ed ancora è del tutto simile quella col metodo Cartesiano, onde e l'una e l'altra si lascia per brevità.

PRO-

PROBLEMA XXXV.

Ritrovare un numero intiero che sia eguale alla somma delle sue parti aliquote.

Tali numeri si chiamano *perfetti*.

L'Equazione costitutiva di questo Problema ha da essere tale, che ridotta poi all'ultima espressione abbia x eguale ad uo oumero iotiero.

Sia p. e. questa Equazione $mx = a + mx - x$; allora $x = a$. Bisogna però che m sia un numero, il quale abbia la somma delle sue parti aliquote differente a se stesso di una unità. Tal'è il oumero 2, e tutte le potenze pari di esso due, seconda, quarta, sesta, ottava ec. come 4, 16, 64, 256 ec. Se dunque in luogo di m si sostituisca il 4, averemo per Equazione costitutiva di questo problema $4x = 1 + 2 + 4 + x + 2x = 7 + 3x$, e per conseguenza $x = 7$; in tal caso $mx = 28$, numero perfetto, che si cercava. Ovvero se facciasi $m = 16$, sarà $mx = 16x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + x + 2x + 4x + 8x = 31 + 15x$ e $x = 31$, per conseguenza $mx = 496$, altro numero perfetto.

E quì conviene notare, che a è eguale ad m accresciuto delle aliquote di esso m ed m così aumentato è lempre un numero primo; ma x si suppone soltanto divisibile per se stesso, cioè oumero primo, e si ritrova eguale ad a, dunque il numero m, con cui

si moltiplica x, ha da avere questa proprietà, che unito alle sue parti aliquote formi un numero primo, come fanno i numeri 2, 4, 16, 64, 256 ec. di sopra.

Ho posto in questo luogo questo Problema ch'è del genere dei determinati, acciocchè mi serva come di Lemma ai tre Problemi susseguenti.

PROBLEMA XXXVI.

Ritrovare due numeri, ciascheduno de' quali sia eguale alle parti aliquote dell'altro.

Tali numeri vengono chiamati *amichevoli*. Sieno i due cercati $4x$, $4yz$, e per le condizioni del Problema averemo queste due Equazioni

$$7+3x=4yz.$$
$$7+7y+7z+3yz=4x.$$

Nella prima Equazione $x=\frac{4yz-7}{3}$, e per conseguenza $4x=\frac{16yz-28}{3}$. Ora le due Equazioni condizionali si cangeranno in questa $7+7y+7z+3yz=\frac{16yz-28}{3}$, ovvero moltiplicandola per 3, $21+21y+21z+9yz=16yz-28$, la quale ridotta $49+21y+21z=7yz$, poi divisa per 7, $7+3y+3z=yz$, cioè $3z+7=yz-3y$, e dividendo per

per $z-3$, s'averà $\frac{3z+7}{z-3}=y$. Bisogna che z sia maggiore di 3, e che sia ancora un numero primo, ma tale, sicchè il valore di y diventi un numero intiero. Suppongasi $z=5$; allora $y=11$, e $x=71$, e per conseguenza il primo dei numeri amichevoli $4x=284$, e'l secondo $4yz=220$.

Se si prendesse $2x$ per il primo di questi due numeri, $2yz$ ovvero yz per il secondo, o se si facesse qualunque altra supposizione più semplice, si perverrebbe colle regole dell' Equazioni a numeri che non soddisferebbero al Problema; onde si deduce che i numeri 284 e 220 sono i minori, che possono essere amichevoli.

Se si desiderasse dei numeri più grandi, pongasi $8x$ e $8yz$ per questi due numeri, e s'averà per le condizioni del Problema queste due Equazioni.

$$15+7x=8yz.$$
$$15+15y+15z+7yz=8x.$$

Nella prima Equazione $x=\frac{8yz-15}{7}$, e perciò $8x=\frac{64yz-120}{7}$. Si sostituisca quest' ultima Equazione nella seconda, ed averemo $15+15y+15z+7yz=\frac{64yz-120}{7}$, ovvero $105+105y+105z+49yz=64yz-120$, e ridotta

dotta a' minimi termini $225 + 105z = 15yz - 105y$. Si divida per 15 quest'ultima, e resterà poi $15 + 7z = yz - 7y$, cioè $\frac{7z+15}{z-7} = y$ in cui si vede, che z ha da essere un numero primo maggiore di 7. Sia dunque $z = 11$, per conseguenza sarà $y = 23$ ed $x = 287$; ma 287 non è numero primo, poichè è composto di 7 e 41, e per conseguenza le supposizioni di $8x$ e $8yz$ non sono adequate.

Si ponga $16x$ e $16yz$ per i due numeri che si cercano, che si averà queste due Equazioni da risolvere,

$$31 + 15x = 16yz.$$
$$31 + 31y + 31z + 15yz = 16x.$$

Nella prima Equazione $x = \frac{16yz - 31}{15}$, e per conseguenza $16x = \frac{256yz - 496}{15}$; dunque $31 + 31y + 31z + 15yz = \frac{256yz - 496}{15}$, nella quale si ritrova $y = \frac{15z + 31}{z - 15}$, e z dev' essere un numero primo maggiore di 15. Se dunque si suppone $z = 23$, sarà $y = 47$, $x = 1151$, e i due numeri cercati 18416 e 17296 ec.

PRO-

PROBLEMA XXXVII.

Ritrovare due numeri, ciascheduno de' quali colle sue parti aliquote faccia una medesima somma.

Se si pongono $2x$, $4y$ per i due numeri che si cercano, s'averà per la condizione del Problema questa Equazione $3x+3=7y+7$, ovvero $3x=7y+4$, e dividendo per 3, si troverà $x=\frac{7y+4}{3}$. Ora poichè la natura del Problema richiede, che le ignote x e y sieno numeri primi; supponendo $y=5$, s'averà $x=13$, e i due numeri cercati saranno 26 e 20, de' quali ciascheduno colle sue parti aliquote fanno 42.

Se si vuole degli altri numeri di simil sorta, prendasi $4x$, $8y$ per i due numeri cercati, e per la condizione del Problema averemo $7x+7=15y+15$, e per conseguenza $x=\frac{15y+8}{7}$; che se si suppone $y=13$, si ritroverà $x=29$ e i due numeri cercati saranno 116 e 104, ciascheduno de' quali colle sue parti aliquote fa 210. ec.

Dal che chiaramente apparisce, che si può ritrovare due altri numeri all' infinito più grandi, secondo che maggiori sono i numeri che moltiplicano le ignote, o secondo che

che l' una delle ignote poste nella Equazione costitutiva, si suppone maggiore ec.

PROBLEMA XXXVIII.

Ritrovare due numeri tali, che la somma delle parti aliquote dell' uno superi di un quadrato la somma delle parti aliquote dell' altro.

Sieno questi due numeri xxy, xxz, e uu sia il quadrato dell' eccesso menzionato nel Problema. Le aliquote del primo dei numeri cercati xxy sono $x+xx+y+xy+1$, e $x+xx+z+xz+1$ quelle del secondo. Si sottrino queste seconde aliquote dalle prime, e s' averà $y-xy-z-xz=uu$, e per conseguenza $x = \frac{uu-y+z}{y-z}$.

Questo valore di x, come ancora ciascheduno delle due altre ignote y, z, dev' essere un numero primo, acciocchè i due numeri xxy, xxz, non abbiano altre aliquote che quelle, che abbiamo determinate. Ora facciasi $x=5$, e s' averà $5=\frac{uu-y+z}{y-z}$ ovvero $6y-6z=uu$, e $y-z=\frac{uu}{6}$; dal che si conosce, che il quadrato uu ha da essere un numero intiero moltiplice di 6, affinchè possa essere da 6 diviso senza residuo. Supponiamo

mo dunque $u=6$, che averemo poi $\frac{uu}{6}=6$ $=y-z$; si prenda in vece di y e di z due numeri primi, la di cui differenza sia 6, p. e. 13 e 7, e'l Problema sarà risoluto.

Se si suppone $y=13$, e $z=7$, i due numeri che si cercano, saranno 325, 175; imperciocchè la somma 109 delle parti aliquote 1, 5, 13, 25, 65, del primo 325, sopravanza le parti aliquote 1, 5, 7, 25, 35, del secondo 175, del numero quadrato 36.

Si potrà avere dei numeri più piccioli, se in vece di supponer $x=5$, si farà $x=3$, e allora $z=\frac{uu-y+z}{y-z}$, e fatta la riduzione $\frac{uu}{4}=y-z$. Si prenda dunque $u=4$, es'averà $y-z=4$; perciò y e z hanno da essere eguali a due numeri primi, differenti tra loro di 4. Facciasi $y=11$, e $z=7$, e s'averà il Problema risoluto; cioè i due numeri richiesti si ritroveranno essere 99 e 63.

PROBLEMA XXXIX.

Ritrovare un numero che sia divisibile senza residuo per un numero dato, e che per un'altro numero dato sia divisibile con un certo residuo.

Se si divide il numero che si cerca prima per m, sia x il quoto della divisione sen-

senza residuo. Se lo si divide poi per n, sia y il quoto ed a il residuo; dunque l' Equazione costitutiva di questo Problema sarà

$mx = ny + a$, e per conseguenza $x = \frac{ny + a}{m}$.

Questo Problema ha da avere una risoluzione in numeri intieri delle grandezze x e y; e poichè egli è indeterminato, bisogna nel determinare l' ignota y avere riguardo alle grandezze m, n, a, con cui ella è meschiata, supponendola eguale ad un numero intiero tale, che moltiplicato per n e'l prodotto sommato con a, questa somma divisa per m sia eguale ad un numero intiero. Sia per tanto $n = 7$, $m = 5$, ed $a = 3$; poichè 5 entra 1 volta in 7 con 2 di residuo, e questo residuo 2 entra 2 volte in 5 con 1 di residuo se si suppone $y = 2$, questo moltiplicando $n = 7$ darà per prodotto 14, cui manca 1 per essere diviso senza residuo da $m = 5$. Se si suppone $y = 4$, sarà $ny = 28$, e a questo prodotto vi manca 2 per essere diviso giustamente da $m = 5$; e se si fa $y = 6$, $ny = 42$, il qual numero unito ad $a = 3$ fa 45, ch' è divisibile senza residuo da $m = 5$; dunque $y = 6$ risolve il Problema, e'l numero cercato sarà 45.

Questo Problema può essere risoluto più facilmente in quest' altro modo. Si divida n per m e'l residuo di questa divisione è 2, il quale unito con $a = 3$ fa $5 = m$; dunque

que se si suppone $y=1$, sarà $x=\frac{7+3}{5}=2$, e il Problema risoluto.

PROBLEMA XL.

Ritrovare un numero, che diviso per 2 ovvero per 3 oppure per 5 lasci sempre 1 di residuo, e diviso per 7 non lasci residuo veruno.

Questo Problema è semplicissimamente espresso così $2x+1=3y+1=5z+1=7u$, ovvero $2x=3y=5z=7u-1$. Per risolverlo è necessario cercare un numero divisibile per 2, 3, 5, e che sia minore dell' unità di un' altro divisibile per 7. Ora il più picciolo numero che possa esser diviso per 2, 3, 5 è 30, prodotto di detti tre numeri, perchè (come abbiamo detto di sopra) son' essi i veri esponenti delle loro ragioni. Si faccia poi questa Equazione cioè si supponga $30x=7u-1$, cioè $x=\frac{7u-1}{30}$, e proseguindo come nel Problema precedente dicasi, il 7 entra 4 volte in 30 con 2 di residuo, e questo 2 entra 3 volte in 7 con 1 di residuo, dunque si moltiplichi 30 per 3, e al prodotto 90 si aggiunga l'unità, che averemo 91, il numero minore che possa risolvere il Problema.

Se si vogliono degli altri numeri che soddisfino a tutte le condizioni del Problema, basta

basta unire a 91 il numero 210, ch'è il minore divisibile senza residuo per 2, 3, 5, 7, ovvero il doppio, il triplo, il quadruplo ec. di detto 210, e se ne ritroveranno infiniti, che risolveranno il Problema.

91 . 91 . 91 . 91 . 91 . 91 . 91 .
210 . 420 . 630 . 840 . 1050 . 1260. ec.

91 . 301 . 511 . 721 . 931 . 1141 . 1351.

PROBLEMA XLI.

Ritrovare un numero che diviso per 7 lasci 2 di residuo diviso per 11 lasci uno, e diviso per 13 lasci 9 di residuo.

L'Equazione costitutiva di questo Problema è $7x+2=11y+1=13z+9$, ovvero ridotta $7x+1=11y=13z+8$. Ora cercando poco a poco la risoluzione di questo Problema, bisogna operare così. Poichè $7x+1=11y$, dunque $\frac{7x+1}{11}=y$, e per il metodo seguito ne' due precedenti Problemi facendo $x=3$, si averà $y=2$, e 'l numero che soddisfa ad una condizione del Problema sarà 22. Questo numero 22 contiene il 13 una volta con 9 de residuo, il qual 9 è maggiore dell'8 ch'è unito a 13z nella Equazione ridotta, di una unità; bisogna dunque ritrovare un' altro numero moltiplice di 11 e di 7 e che sia minore dell' unità per contenere il 13 senza residuo, e questo nume-

numero così moltiplice unito a 22 darà il numero ricercato. Per aver questo numero facciasi un' Equazione simile all' ultima di sopra, cioè suppongasi $7 \times 11x = 77x = 13z - 1$, ovvero $x = \frac{13z-1}{77}$, e operando come nel precedente ritroverassi $z = 6$, per conseguenza $x = 1$, e il numero moltiplice di 11 e di 7, e minore dell' unità per esser moltiplice di 13, è 77, il quale unito a 22 darà 99 che soddisferà alle condizioni dell' Equazione ridotta; dunque a 99 aggiuntavi l' unità si averà 100 che scioglierà il Problema.

Se si aggiunge a 100 il più picciolo numero 1001 che 7, 11, 13, possono dividere senza residuo, o i moltiplici di esso 1001, averemo infiniti numeri che soddisferanno al Problema.

1001.	2002.	3003.	4004.	5005.		
100.	100.	100.	100.	100.	100.	ec.
100.	1101.	2102.	3103.	4104.	5105.	

La risoluzione di questo Problema si può applicare al seguente Esempio tratto dalla Cronologia.

Si cerca in qual' anno del Periodo Giuliano il Cielo Solare è 18, il Lunare 5, e 8 l' Indizione Romana.

L'Equazione costitutiva $28x+18=19y+5=15z+8$.

ovvero ridotta $28x+13=19y \quad =15z+3$.

I. Poichè $28x+13=19y$, dunque $\frac{28x+13}{19} = y$

$= y$, e per la regola dei Problemi precedenti bisogna che $x = 26$, e il numero che soddisfa ad una parte delle condizioni del Problema sarà 741. Il 15 dell'altro membro dell'Equazione entra in 741 molte volte con 6 di residuo, cioè con tre unità di più di quel che il Problema richiede; bisogna dunque trovare un numero moltiplice di 28 e di 19, e che nel medesimo tempo vi manchino 3, perchè sia diviso senza residuo da 15. II. Si moltiplichino 28 e 19, de' quali il prodotto 532 è diviso da 15 con 7 di residuo; dunque suppongasi questa Equazione $7x = 15z - 3$, ovvero $x = \frac{15z - 3}{7}$, e ritroveremo $x = 6$ facendo $z = 3$. Perciò si moltiplichi 532 per 6, e al prodotto di questa moltiplicazione 3192 si aggiunga 741 ed averemo il numero 3933 che soddisferà alla prima equazione ridotta; che se a questo 3933 si unirà 5, averemo il numero 3938 che scioglierà il Problema.

Nota.

Sono stati posti gli ultimi Problemi per far vedere, che molte volte non basta per sciogliere un Problema ritrovare l'Equazione costitutiva, e ridurla a' minimi termini, ma bisogna ancora farvi delle osservazioni sopra le condizioni espresse nel Pro-

Problema per giugnere alla risoluzione che si desidera.

La prima Equazione costitutiva è tratta dal dato cronologico, che fa il Cielo solare 28, il Lunare 19, e l'Indizione 15.

SEZIONE TERZA.

Dei Problemi di Semplice, di Doppia e di Tripla Egualità.

NElla risoluzione dei Problemi della Sezione precedente, abbiamo date le Regole per determinare i Limiti delle grandezze note nei problemi determinati, cioè abbiamo insegnato come si deono determinare le grandezze note dei Problemi generalmente espressi, per avere la risoluzione in numeri positivi e razionali. Abbiamo cercati ancora i Limiti delle grandezze ignote ne' Problemi Indeterminati, acciocchè le loro risoluzioni sieno sempre espresse in numeri positivi; ora ci resta ad investigare le Regole dei Problemi Indeterminati, che hanno l'Equazioni costitutive colle grandezze ignote di più dimensioni, per avere le loro risoluzioni in numeri razionali. Tali Problemi chiamansi *di semplice*, *di doppia*, e *di tripla Egualità*.

La maggior parte dei Problemi di Dio-
V 2 fan-

fanto sono di questo genere. Si noti, che *Equazione* ed *Egualità* ovvero Eguaglianza sono quasi la medesima cosa; si fa però uso della prima di queste voci per dinotare l' eguaglianza di una grandezza rapportata ad un' altra, p. e. che ab è eguale a cx, cioè $ab = cx$; e si serviamo della seconda soltanto ne' Problemi numerici. P. E. se nell' Equazione costitutiva di un Problema si eguaglia una grandezza che contiene un' ignota, ad un' ignoto quadrato o cubo ec. il Problema dicesi *di semplice Egualità*; se si eguagliano due differenti grandezze che contengono una medesima ignota, a due differenti ignoti quadrati o cubi ec. il Problema si nomina di *doppia Egualità*; e *di tripla Egualità* se tre sono le grandezze differenti che contengono una medesima ignota, eguagliate a tre differenti quadrati o cubi ignoti. Le Regole di tal sorta di Problemi saranno sparse qua e là nelle risoluzioni de' Problemi seguenti, e nello stesso tempo daremo le risoluzioni di quelli di Diofanto col di lui metodo, come abbiamo fatto nella Sezione precedente.

PRO-

CAP. I.

Problemi di semplice Egualità.

PROBLEMA XLII.

Ritrovare due grandezze commensurabili, e tali che la loro somma e quella dei loro quadrati abbiano un medesimo rapporto come due grandezze note.

Sieno a e b le due grandezze note; la prima delle ignote x, e xy la seconda, acciocchè con una medesima ignota x moltiplicante la somma delle due grandezze cercate, e quella dei loro quadrati, l'Equazione costitutiva del Problema si possa facilmente ridurre a lineare, cioè ad una sola dimensione. Dunque per la condizione del Problema $x+xy.x^2+x^2y^2::a.b$, ovvero dividendo la prima ragione per x, $1+y.x+xy^2::a.b$; e moltiplicando gli estremi e i medj $b+by=ax+axy^2$. Si divida l'uno e l'altro membro per $a+ay^2$, e s'averà $\frac{b+by}{a+ay^2}=x$; dopo di che non si ha che da determinare a piacere l'ignota y per avere il Problema risoluto.

Il metodo di Diofanto nella risoluzione di questo Problema, ch'è tra' suoi il primo del II. Libro, differisce da quello che

 ab-

abbiamo noi seguito, solo nella posizione della seconda cercata grandezza, ponendola egli eguale ad un determinato numero di x; quando da noi è stata posta ad un determinato numero y di x, acciocchè la risoluzione del Problema sia più universale. Facciasi per tanto (seguendo le supposizioni di Diofanto) $a = 1$, $b = 10$, $cy = 2$, diverrà $x = \frac{10 + 20}{1 + 4} = 6$, e $xy = 12$; lo che soddisfa alla condizione del Problema: $6 + 12 . 36 + 144 :: 1 . 10$.

Se in vece della ragione delle somme si cercasse la ragione delle differenze, allora il Problema si cangerebbe in questo: *Ritrovare due numeri razionali, de' quali la differenza sia alla differenza dei loro quadrati, come due grandezze o numeri dati*; ch' è il 2°. del Lib. II. di Diofanto.

In tal caso $xy - x . x^2y^2 - x^2 :: a . b$, e per conseguenza $x = \frac{by - b}{ay^2 - a}$. Onde supponendo $y = 2$, $a = 1$, $b = 6$, come ha supposto Diofanto, sarà $x = \frac{12 - 6}{4 - 1} = 2$, e $xy = 4$. Imperciocchè $4 - 2 . 16 - 4 :: 1 . 6$.

No-

NOTA.

Questo Problema non differisce dal Problema 24. della Sezione precedente, se non che in questo non è determinata la ragione delle due grandezze ignote, come in quello, attesochè quì egli è espresso più generalmente; nondimeno può sciogliersi col metodo di quello, ed allora il Problema diviene determinato.

PROBLEMA XLIII.

Dividere un quadrato noto in due quadrati perfetti.

Sia a la radice del quadrato noto, e x, z quelle dei due ignoti; dunque per la supposizione $aa = x^2 + z^2$. Ma poichè ciascheduna delle radici x e z è minore della radice a, si prenda $a - xy$, ovvero $xy - a$ in vece di z, affinchè si possa ridurre facilmente a lineare l'Equazione costitutiva del Problema, e si averà $aa = x^2 + z^2 = x^2 + a^2 + x^2y^2 - 2axy$, e riducendola per trasposizione $2axy = x^2 + x^2y^2$, ovvero $2ay = x + xy^2$, e $\frac{2ay}{1+y^2} = x$.

Col Metodo di Diofanto.

Sia aa il quadrato da dividere in due altri quadrati perfetti, e sia xx uno di questi qua-

drati che si cercano ; dunque bisogna che $aa - xx$ sia eguale ad un quadrato . Prendasi $bx - a$ per radice di questo quadrato, e'l suo quadrato sarà $b^2x^2 + a^2 - 2abx = aa - xx$, ovvero trasponendo $b^2x^2 + x^2 = 2abx$, e dividendo per x , poi per $b^2 + 1$, resterà x

$$= \frac{2ab}{b^2+1}$$; il che non differisce dalla risoluzione di sopra , sennonchè y in questa è determinato prima di ritrovare il valore di x, e in quella resta da determinarsi dopo avere ritrovato il valore di x.

Suppongasi pet tanto, come ha fatto Diofanto nella Quest. 8. del II. Libro , che $aa = 16$, e che $y = b = 2$, sarà $x = \frac{16}{5}$, e i quadrati che si cercavano $\frac{256}{25}$ e $\frac{144}{25}$, la somma de' quali è $\frac{400}{25} = 16$.

Nota.

Se si volesse nella risoluzione di questo Problema , che una delle radici dei nuovi quadrati fosse ristretta tra certi determinati limiti, p. e. tra c e d.

Prendasi u una grandezza arbitraria minor di c e più grande di d ; e supposta questa grandezza u eguale ad x, di cui s' è ritrovato il valore nella risoluzione precedente, s' averà $x = u = \frac{2ay}{yy+1}$. E moltiplicando i

due

due membri per $yy + 1$, diviene $2ay = uyy + u$, e dividendoli per u, $\frac{2ay}{u} = yy + 1$, ovvero $yy - \frac{2ay}{u} + 1 = 0$. Si aggiunga $\frac{aa}{uu}$ e ſi levi 1 da una parte e dall'altra, ſi averà $yy - \frac{2ay}{u} + \frac{aa}{uu} = \frac{aa}{uu} - 1$; ed eſtraendo la radice $y - \frac{a}{u} = \sqrt{\frac{aa}{uu} - 1}$, ovvero traſportando $y = \frac{a + \sqrt{aa - uu}}{u}$. Se ſi pone in queſta Equazione c e d in luogo di u, ſi ritroverà che la grandezza ignota y dee avere i ſuoi giuſti limiti tra $\frac{a + \sqrt{aa - cc}}{c}$ e $\frac{a + \sqrt{aa - dd}}{d}$, acciocchè la radice x ſia riſtretta tra i limiti di c e d, che gli ſono ſtati aſſegnati. Biſogna che la più grande delle due date grandezze c e d ſia minore di a, perche altrimenti uno dei limiti di y ſi eſprimerebbe con una immaginaria.

Supponiamo $aa = 9$, $c = \sqrt{3}$, $d = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, dunque ſarà y trà $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\frac{3 + \sqrt{9 - \frac{10}{4}}}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}$

=

$= \frac{3\sqrt{10}+\sqrt{65}}{5}$, cioè presso a poco tra $3\frac{9}{25}$ e $3\frac{7}{10}$. Sia per tanto $y=\frac{7}{2}$; dunque $x=\frac{84}{53}$, $z=\frac{155}{53}$, $x^2+z^2=aa=\frac{31281}{2209}=9$.

PROBLEMA XLIV.

Dividere la somma di due quadrati perfetti in due altri quadrati perfetti.

Sia a la radice del quadrato ooto maggiore, e b la radice del minore. Nella generale risoluzione di questo Problema, la radice di un de' due quadrati ignoti sia minore della radice a, e l'altra per conseguenza maggiore di b. Chiameremo dunque queste due nuove radici $a-x$ e $xy-b$.

Diofanto in questo Problema, ch' è de' suoi il X. del Lib. II. pone per le due nuove radici $x+b$, e $xy-a$; lo che presso a poco è lo stesso.

Stando nella prima supposizione; i quadrati delle due nuove radici $a-x$ e $xy-b$ sono $a^2-2ax+x^2$, e $x^2y^2-2bxy+b^2$. La somma di questi è eguale alla somma di due quadrati noti, $a^2-2ax+x^2+x^2y^2-2bxy+b^2=a^2+b^2$, e ridotta questa Equazione a termini minori $x^2+x^2y^2=2bxy+2ax$; e divideodo prima per x poi per $1+y^2$, resterà $x=\frac{2by+2a}{1+y^2}$; e per conseguenza xy $-b$

$-b = \frac{2ay + byy - b}{1 + y^2}$. La grandezza y è arbitraria, ma nel modo ch'è stata proposta, deve essere maggiore dell'unità.

Facciasi $y = 2$, $a = 3$, $b = 2$, come ha supposto Diofanto; sarà $x = \frac{8+6}{5} = \frac{14}{5}$, e per conseguenza $a - x = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$, e $xy - b = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5}$; ed è la stessa risoluzione che quella di Diofanto.

Quadrati $\frac{1}{25} + \frac{324}{25} = 13$.

NOTA.

Se si desidera in questa risoluzione, che una delle ignote radici sia ristretta tra certi limiti.

Si prenda c per il più grande di questi limiti, e d per il più picciolo, e si nomini z una grandezza arbitraria minore di c e maggiore di d. La radice a del quadrato maggiore dei due dati, o sopravanzerà ciaschedun dei limiti, o sarà minore di ciascheduno, o sarà minore del più grande c e sopravanzerà il più picciolo d; e questi sono tre casi, che fa d'uopo di spiegare distintamente.

Pri-

Primo Caso.

La radice a sia maggiore di c, e di d; si faccia dunque l'arbitraria z, supposta maggiore di c e minore di d, eguale ad $a-x$ e si averà $x=a-z$. Ma $x=\frac{2by+2a}{1+y^2}$, dunque $a-z=\frac{2by+2a}{1+y^2}$, e moltiplicando l'uno e l'altro membro per $1+y^2$, sarà $a-z+ay^2-y^2z=2by+2a$, ovvero $ay^2-y^2z-2by=a+z$. Ora si divida questa Equazione per $a-z$, dopo di che ella sarà ridotta a $y^2-\frac{2by}{a-z}=\frac{a+z}{a-z}$. Si compisca il quadrato aggiungendo da una parte e dall'altra $\frac{bb}{aa-2az+zz}$, in questo modo $y^2-\frac{2by}{a-z}+\frac{bb}{aa-2az+zz}=\frac{aa-zz+bb}{aa-2az+zz}$, e la radice quadrata di questa Equazione è $y-\frac{b}{a-z}=\frac{1}{a-z}\sqrt{aa-zz+bb}$, cioè $y=\frac{b+\sqrt{aa-zz+bb}}{a-z}$.

Se

Se in questa Equazione si porrà ciascheduno dei limiti c e d in luogo di z, si ritroverà che i giusti limiti dell' arbitraria y sono $\frac{b+\sqrt{aa-cc+bb}}{a-c}$ e $\frac{b+\sqrt{aa-dd+bb}}{a-d}$.

E poichè $ayy-yyz-2by=a+z$, ovvero $ayy-2by-a=yyz+z$ farà $z=\frac{ayy-2by-a}{yy+1}$. Ma affinchè il numeratore $ayy-2by-a$ sia positivo, bisogna che ayy sia maggiore di $2by+a$, e yy maggiore di $\frac{2by+a}{a}$, e per conseguenza $yy-\frac{2by}{a}$ sia maggiore di $\frac{a}{a}$. Aggiungendo $\frac{bb}{aa}$ da una parte e dall" altra, $yy-\frac{2by}{a}+\frac{bb}{aa}$ farà maggiore di $\frac{aa+bb}{aa}$. la radice quadrata $y-\frac{b}{a}$ maggiore di $\frac{\sqrt{aa+bb}}{aa}$ cioè y maggiore di $\frac{b+\sqrt{aa+bb}}{a}$.

Con un simile raziocinio lo stesso y farà maggiore di $\frac{-a\sqrt{aa+bb}}{b}$, supponendo che il numeratore $2ay+byy-b$ del valore di $xy-b$ sia positivo.

Se

Se suppongasi $c=\frac{29}{10}$, e $d=\frac{1}{10}$, y sarà tra $20+\sqrt{459}$ e $\frac{20+\sqrt{1299}}{29}$. Sia dunque $y=3$; sarà per conseguenza $x=\frac{9}{5}$, $a-x=z=\frac{6}{5}$, e $xy-b=\frac{17}{5}$.

Quadrati $\frac{36}{25}+\frac{289}{25}=\frac{325}{25}=13$.

Secondo Caso.

Se ciaschedun dei limiti c e d è maggiore della radice a; si eguagli l'arbitraria z ad $xy-b$, e si averà per la trasposizione $xy=z+b$, e $x=\frac{z+b}{y}=\frac{2a+2by}{yy+1}$. E moltiplicando da una parte e dall' altra per y^3+y, acciocchè svaniscano le frazioni, ritroverassi $zyy+byy+z+b=2ay+2byy$, ovvero $zyy-byy-2ay=-b-z$. Dividendo ciaschedun membro per $z-b$, ed aggiungendovi di poi il quadrato $\frac{aa}{zz-2bz+bb}$, la radice quadrata dei due nuovi membri darà questa Equazione $y-\frac{a}{z-b}=\frac{1}{z-b}\sqrt{aa-zz+bb}$, ovvero $y=\frac{a+\sqrt{aa-zz+bb}}{z-b}$. E ponendo nell'Equazione ciaschedun dei limiti c e d in cambio di z, si troverà che i giu-

i giusti limiti dell'arbitraria y saranno tra $\frac{a+\sqrt{aa-cc+bb}}{c-b}$ e $\frac{a+\sqrt{aa-dd+bb}}{d-b}$. E affinchè ciaschedun dei numeratori delle nuove radici sia positivo, il medesimo y dee essere maggiore di $\frac{b+\sqrt{aa+bb}}{a}$ e di $\frac{-a+\sqrt{aa+bb}}{b}$.

Si supponga $c=\frac{26}{10}$, e $d=\frac{31}{10}$; del resto si faccia l'applicazioone come nel primo caso.

Terzo Caso.

E se la radice a val meno di c, ed è maggiore di d, la radice z potrà essere maggiore di a; onde si può supporre che le radici dei due nuovi quadrati sieno $a+x$, e $b-xy$; in tal caso il valore di x si ritroverà essere $\frac{2by-2a}{yy+1}$. E supponendo la radice z ch'è per supposizione maggiore di d, eguale alla radice $b-xy$ ovvero al suo valore $\frac{2ay-2by+b}{yy+1}$; se si moltiplica l'Equazione $z=\frac{2ay-2by+b}{yy+1}$ per $yy+1$, s'averà $zyy+z=2ay-2by+b$; ovvero $zyy+byy-2ay=b-z$. E dividendo da una parte e dall'altra

tra per $z+b$, e aggiungendo ai due nuovi membri il quadrato $\frac{aa}{zz+2bz+bb}$, la radice quadrata dei due altri che si scopriranno, darà la seguente Equazione $y - \frac{a}{z+b} = \frac{1}{z+b}\sqrt{aa+bb-zz}$, e $y = \frac{a+\sqrt{aa+bb-zz}}{z+b}$. E ponendo in luogo dell'arbitraria z ciaschedun dei limiti c e d, bisognerà che y abbia i suoi limiti tra $\frac{a+\sqrt{aa+bb-cc}}{b+c}$ e $\frac{a+\sqrt{aa+bb-dd}}{b+d}$, se si vuole che la radice z sia la minore delle due cercate.

Ma acciocchè il numeratore $2ay-byy+b$ del valore di $b-xy$, sia positivo, sarà necessario che y sia minore di $\frac{a+\sqrt{aa+bb}}{b}$; e per contrario sia maggiore di $\frac{-b+\sqrt{aa+bb}}{a}$, affinchè il numeratore $ayy+2by-a$ del valore di z sia ancora positivo.

Se si suppone poi d maggiore di b facciasi per conseguenza $z = a+x$ e si risolverà la questione, operando nel modo che segue. Sia z eguale ad $a+x$ e tra i limiti c e d. Poichè c sopra-

fopravanza z ovvero $a + x$, farà c ancora maggiore di $\frac{ayy + 2by - a}{yy + 1}$ ch' è eguale ad $a + x$. Moltiplicando dunque l' uno e l' altro per $yy + 1$, il prodotto $cyy + c$ farà maggiore di $ayy + 2by - a$; trafportando, $cyy - ayy - 2by$ maggiore di $-a - c$. Dividendo tutto per $c - a$, l' efponente $yy - \frac{2by}{c - a}$ maggiore di $\frac{-a - c}{c - a}$; e aggiungendo da una parte e dall'altra il quadrato $\frac{bb}{cc - 2aa + aa}$, farà $yy - \frac{2bc}{c - a} + \frac{bb}{cc - 2ac + aa}$ maggiore di $\frac{aa + bb - cc}{cc - 2ac + aa}$, eftraendo la radice, $\frac{b}{c - a} - y$ maggiore di $\frac{1}{c - 1}\sqrt{aa + bb - cc}$ e trafportando $\frac{b - \sqrt{aa + bb - cc}}{c - a}$ farà maggiore di y. Ma z ovvero $\frac{ayy + 2by - a}{yy + 1}$ fopravanza d per ipotefi, dunque il numeratore $ayy + 2by - a$ fopravanza $dyy + d$; ficchè

che si può concludere con un raziocinio simile al precedente, che y è maggiore di $\frac{-b+\sqrt{aa+bb-dd}}{a-d}$, se a è maggiore di d; e per contrario che lo stesso y è minore di $\frac{b+\sqrt{aa+bb-dd}}{d-a}$, se d è maggiore di a. E siccome y può avere allora due valori, egli sopravanza ancora $\frac{b-\sqrt{aa+bb-dd}}{d-a}$; onde per avere i suoi giusti limiti, si prenderà il più grande e 'l minore di tutti quelli che sono stati scoperti, e la questione sarà intieramente risoluta.

Suppongasi $c=\frac{11}{5}$, $d=\frac{1}{10}$, e tutto il resto come ne' due altri casi ec.

PROBLEMA XLVII.

Dividere una grandezza nota in due parti, ciascheduna de' quali ricevendo una grandezza nota faccia un quadrato perfetto.

Chiamo $2a$ la grandezza nota da dividere in due parti, e $2x$ la differenza di esse parti; la più grande dunque di queste parti sarà $a+x$ e la minore $a-x$. Sia b la grandezza nota che ciascheduna delle parti ha

ha da ricevere, y la radice del quadrato eguale alla somma maggiore, e z la radice del quadrato eguale alla minore. Sarà dunque la prima Equazione $a+x+b=yy$, ovvero $x=yy-a-b$; e la seconda $a-x+b=zz$, ovvero $x=a+b-zz=yy-a-b$, e $yy+zz=2a+2b$. Dal che chiaramente apparisce, che la somma $2a+2b$ dee esser eguale a due quadrati noti, p. e. cc e dd; allora i due quadrati si ritroveranno operando colla regola del Problema precedente, e facendo $c-t$, e $tu-d$ radici di questi due nuovi quadrati; sarà perciò $t=\frac{2du+2c}{uu+1}$; dunque $c-t$ (cioè z ovvero y) $=\frac{cuu-2du-c}{uu+1}$, e $tu-d$ (cioè y ovvero z) $=\frac{2cu+duu-d}{uu+1}$. Si suppone che c sia maggiore di d, come nella Nota precedente.

E affinchè x o il suo valore $yy-a-b$ sia positivo, bisogna che yy sia maggiore di $a+b$; e per lo contrario acciocchè x o il suo valore $a+b-zz$ sia ancora positivo, il quadrato zz sarà necessariamente minore di $a+b$. Ma la metà a della somma delle parti è maggiore di x metà della differenza, o del suo valore $yy-a-b$; aggiun-

gendo $a+b$ da una parte e dall' altra, la somma $2a+b$ sarà maggiore di yy. La stessa a essendo anche maggiore di $x=a+b-zz$, sarà il quadrato zz maggiore di b. Dunque i limiti di y saranno tra $\sqrt{a+b}$ e $\sqrt{2a+b}$, e quelli di z tra $\sqrt{a+b}$ e $\sqrt{b}$. Se si vuole poi restringere tra certi limiti l' una delle ignote t e u p. e. l' ignota u; poichè u è qui, come y è nel primo caso della nota precedente, allora $u=\frac{d+\sqrt{cc-tt+dd}}{c-t}$, e ponendo in luogo di t ciascheduna delle ignote y e z che sono come limiti di u s'averà per giusti limiti della grandezza u le due seguenti grandezze composte $\frac{d+\sqrt{cc-yy+dd}}{c-y}$ e $\frac{d+\sqrt{cc-zz+dd}}{c-z}$. Ma per ipotesi $cc-yy+dd=zz$, e $cc-zz+dd=yy$; dunque i limiti di u saranno $\frac{d+z}{c-y}$ e $\frac{d+y}{c-z}$, ovvero ponendovi i limiti di y e di z ritrovati di sopra, i limiti di u saranno in termini noti $\frac{d+\sqrt{b}}{c-\sqrt{2a+b}}$ e $\frac{d+\sqrt{a+b}}{c-\sqrt{a+b}}$.

Fac-

Facciasi per tanto $2a = 1$, $b = 6$, e $2a + 2b = cc + dd = 9 + 4$, sarà u tra $5 + 2\sqrt{26}$ e $\frac{2+\sqrt{6}}{3-\sqrt{7}}$.

Sia $u = 10$; allora $x = \frac{257}{101}$, $y = \frac{251}{101}$, $z = \frac{505}{20402}$, dunque $a + z = \frac{5353}{10201}$, $a - z = \frac{4848}{10201}$, $a + x + b = yy = \frac{60504}{10201}$, e $a - x + b = zz = \frac{66049}{10201}$.

PROBLEMA XLVIII.

Dividere una grandezza nota in due parti, de' quali la più grande avendo ricevuta una nota grandezza, e la minore ricevendo ancora un' altra nota grandezza, ciascheduna delle due somme sia eguale ad un quadrato.

Si chiami $2a$ la grandezza che si vuol dividere in due parti, le quali, avendo $2x$ per differenza saranno $a + x$, e $a - x$; sia b la grandezza nota da unire alla parte più grande, e g l'altra grandezza nota che si abbia da aggiungere alla parte minore. La parte più grande sarà dunque $a + x + b$, e la parte minore $a - x + g$; e per prima equazione si averà $a + x + b = yy$, ovvero $x = yy - a - b$; per seconda equazione $a - x + g = zz$, cioè $x = a + g - zz = yy - a - b$, ovvero $yy + zz = 2a + b + g$. Dal che ne segue, che la somma $2a + b + g$, eguale ai due quadrati yy e zz, dee contenere giustamente due

 qua-

quadrati perfetti noti p. e. cc e dd, ovvero un solo quadrato noto perfetto p. e. ee che possa essere diviso infinitamente in due quadrati. E di più yy dee essere maggiore di $a+b$, e zz minore di $a+g$, affinchè i valori di y e di z sieno positivi. E siccome a è maggiore di x ovvero di $yy-a-b$; $2a+b$ sarà maggiore di yy. E la medesima a essendo ancora maggiore di x ovvero di $a+g-zz$, il quadrato zz sarà parimenti maggiore di g. Dunque la grandezza y sarà tra i limiti di $\sqrt{a+b}$ e $\sqrt{2a+b}$, e z tra $\sqrt{g}$ e $\sqrt{a+g}$. Ora si suppongano $c-t$ e $tu-d$ le due radici dei nuovi due quadrati che deono essere eguali a $2a+b+g$; sarà (come nel Problema precedente) z ovvero $y = \frac{cuu-2du-c}{uu+1}$, e y ovvero $z = \frac{2cu+duu-d}{uu+1}$; e i limiti di u saranno come nel precedente problema, $\frac{d+z}{c-y}$ e $\frac{d+y}{c-z}$; ne' quali sostituindovi i limiti di y e di z ritrovati di sopra, 1°. se c è maggiore di $\sqrt{2a+b}$, per il primo Caso del Probl. 46. sarà u tra $\frac{d+\sqrt{g}}{c-\sqrt{2a+b}}$ e $\frac{d+\sqrt{a+g}}{c-\sqrt{a+b}}$

2°. se

2°. se $\sqrt{a+b}$ è maggiore di c, per il secondo Caso del detto Problema, sarà u tra $\frac{c+\sqrt{g}}{d+\sqrt{2a+b}}$ e $\frac{c+\sqrt{a+g}}{-d+\sqrt{a+g}}$; 3°. se c è tra $\sqrt{2a+b}$ e $\sqrt{a+b}$, per il terzo Caso del Problema medesimo sarà u tra $\frac{c+\sqrt{a+g}}{d+\sqrt{2a+b}}$ e $\frac{c+\sqrt{g}}{d+\sqrt{a+b}}$.

Altra Risoluzione.

Supposte le altre cose come nella risoluzione precedente, e $2a+b+g$ eguale ad un solo quadrato p. e. ee, che possa essere diviso infinitamente in due quadrati perfetti.

Allora per il Probl. 46. sarà u tra $\frac{e+\sqrt{a+g}}{\sqrt{a+b}}$ e $\frac{e+\sqrt{g}}{\sqrt{2a+b}}$, $y=\frac{2eu}{uu+1}$, $z=\frac{euu-e}{uu+1}$, $x=yy-a-b$ per la precedente risoluzione.

Sia per tanto $2a=1$, $b=2$ e $g=6$, sarà per conseguenza $2a+b+g=ee=9$ e u tra $\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{65}}{5}$ e $\sqrt{3}\sqrt{2}$. Facciasi per esem-

pio $u = \frac{7}{2}$, sarà poi $y = \frac{24}{11}$, $z = \frac{111}{53}$, $x = \frac{67}{50125}$, $a + x = \frac{14318}{2809}$, $a - x = \frac{11571}{2809}$, $a + x + b = \frac{7018}{2809}$, e $a - x + g = \frac{18225}{2809}$.

NOTA I.

Dalla risoluzione generale dei due precedenti Problemi apparisce, che non ogni numero può essere in due quadrati numeri diviso. Imperciocchè $2a + 2b$ ovvero $2a + b + g$ non può essere eguale a due quadrati, se l'una e l'altra di queste grandezze non sono eguali o alla somma di due quadrati come $cc + dd$, o ad un solo p. e. ee; e ciò chiaramente si dimostra sostituindo in luogo di c e di d ovvero di e per ritrovare il valore delle ignote y, z ec. sostituindo, dico, dei numeri irrazionali, perchè allora si averanno i valori delle ignote espressi co' numeri irrazionali, e per conseguenza il Problema non sarà risoluto. Oltre di che un numero non quadrato o non eguale alla somma di due quadrati nello stesso tempo eguale ad un quadrato o alla somma di due quadrati, è una contradizione in termini. Bisogna dunque che la grandezza data colle due altre da essere ad essa aggiuntesieno eguali o ad un numero quadrato o alla somma di due numeri quadrati, perchè possano essere divise in due quadrati perfetti; lo che da Diofanto viene espresso nel seguente modo. La Quest. 12. del suo Lib. V. è questa:

sta: *dividere l'unità in due parti, sicchè aggiungendo un date numero all' una e all' altra delle parti, le somme sieno quadrati perfetti.* Egli soggiugne; *bisogna però che il numero aggiunto non sia dispari*; ch'è quanto dire; *bisogna che la somma degli aggiunti accresciuta dell' unità faccia un numero quadrato, o eguale alla somma di due numeri quadrati.*

Imperciocchè il doppio di qualsivoglia numero accresciuto dell' unità è sempre un numero dispari; dunque bisogna che questo doppio accresciuto dell' unità sia o eguale ad un numero quadrato dispari, o alla somma di due quadrati l'uno pari e l'altro dispari, perchè sia conforme alla condizione di sopra espressa. Ora ogni numero quadrato pari, poichè è fatto da un numero pari preso un pari numero di volte, è parimente pari. E ogni numero quadrato è eguale al quadrato del numero che immediate lo precede, più il doppio di detto numero più l'unità; p. e. il quadrato di $a + 1$ è eguale ad $aa + 2a + 1$; dunque ogni quadrato dispari sarà eguale al quadrato pari della radice pari immediate precedente, più due di queste pari radici, più l'unità. Dunque un quadrato dispari diminuito dell' unità è sempre parimente pari, e per conseguenza bisogna che il numero aggiunto alle parti dell' unità sia un numero pari, come vuole Diofanto, acciocchè il suo doppio accre-

sciu-

sciuto dell' unità sia o un numero quadrato o eguale alla somma di due quadrati.

N o t a II.

Poichè abbiamo nella precedente Nota fatto ceno della Quest. 12. Lib. V. di Diofanto, daremo di essa la risoluzione seguendo intieramente il Metodo di Diofento medesimo.

Sia l' unità da dividere in due parti, e si aggiunga a cadauna di esse parti il numero pari 6, perchè l' una e l' altra di queste somme sieno numeri quadrati.

Poichè $1+6+6=9+4=13$; bisogna dunque dividere 13 in due quadrati, l' uno e l' altro maggiori di 6, e il loro intervallo minore dell' unità. Prendasi la metà di 13, cioè $6\frac{1}{2}$, e si cerchi qual grandezza s' abbia d' aggiungere a $6\frac{1}{2}$ per fare un quadrato. Acciocchè sia levata la frazione, moltiplico $6\frac{1}{2}$ per 4, ed ho 26 di prodotto, a cui unisco la grandezza $\frac{1}{x^2}$, e di poi suppongo, che $26+\frac{1}{x^2}$, ovvero moltiplicando per x^2, $26x^2+1$ sia eguale ad un quadrato. Bisogna supporre ancora che questo quadrato sia eguale all' unità più un certo numero di x, il quadrato del qual numero sottratto da 26 dia un residuo minore del doppio di esso nu-

numero, acciocchè x divenga maggiore dell' unità, e per conseguenza $\frac{1}{x^2}$ minore dell'unità.

Sia dunque questa radice $5x+1$, di cui il quadrato sarà $25x^2+10x+1=26x^2+1$, come s'è detto; per conseguenza $10x=x^2$, e $10=x$. Dunque $x^2=100$, e la parte da aggiungere a 26 sarà $\frac{1}{100}$; si restituisca $26+\frac{1}{100}$ al pristino stato dividendo tutto per 4, dopo di che resterà $6\frac{1}{2}+\frac{1}{400}=\frac{2601}{400}$, ch'è un perfetto quadrato, la di cui radice è $\frac{51}{20}$.

Perciò se si dividerà 13 in due quadrati che al più possibile si accostino a $\frac{51}{20}$, sarà risoluto il Problema. Sia $11x+2$ una delle radici di questi due nuovi quadrati, e l'altra $3-9x$; il primo quadrato sarà

$$121x^2+44x+4$$

il secondo $82x^2-54x+9$

Somma $202x^2-10x+13=13$

cioè $202x^2=10x$

e $x=\frac{10}{202}=\frac{5}{101}$,

Dunque $2+11x=2+\frac{55}{101}=\frac{257}{101}$,

e $3-9x=3-\frac{45}{101}=\frac{258}{101}$ ec.

La risoluzione della Quest. 13 dello stesso Lib. V. di Diofanto ha molta maggior affinità col metodo Cartesiano. Ecco la Questione ne' suoi precisi termini, e la risoluzione della medesima col Metodo di Diofanto. *Dividere l'unità in due parti, ad una de' quali aggiun-*

gen-

gendovi il 2, all' altra il 6., si facciano due somme eguali a due quadrati perfetti.

Poichè $1+2+6=9$, eguale ad un quadrato perfetto, si può dividere questa somma in due quadrati perfetti, per il Probl. 46. Per le supposizioni, uno di questi quadrati perfetti ha da essere maggiore di 2 e minore di 3. Chiamo questo quadrato x^2, l'altro sarà $9-x^2$. Ora, poichè x^2 dee cadere tra 2 e 3, prendasi a piacere due quadrati, l' uno maggiore di 2, l'altro minore di 3, p. e. i due quadrati $\frac{289}{144}$ e $\frac{361}{144}$; in tal caso bisogna, che x sia maggiore di $\frac{17}{12}$ e minore di $\frac{19}{12}$.

Supponiamo che la radice del quadrato $9-x^2$ sia $3-mx$, averemo $9-6mx+m^2x^2=9-x^2$, ovvero $6mx=m^2x^2+x^2$, cioè

$6m=m^2x+x$ e $\frac{6m}{m^2+1}=x$; ch'è lo stesso di ciò,

che dice Diofanto, che x dev'essere eguale ad un certo numero preso sei volte, e diviso per il suo quadrato accresciuto dell' unità. Ma $\frac{6m}{m^2+1}$ ha da essere maggiore di $\frac{17}{12}$ e minore di $\frac{19}{12}$, per le premesse. Supponiamo prima, ch'egli sia maggiore di $\frac{17}{12}$; e questo segno $>$ significhi *maggiore*; e quando egli farà rovescio così $<$, significherà *minore*.

Ave-

Averemo per tanto $\frac{6m}{m^2+1} > \frac{17}{12}$, ovvero $72m > 17m^2 + 17$, e $-17 > 17m^2 - 72m$; dividendo per 17, $-1 > m^2 - \frac{72}{17}m$, e compiendo il quadrato $\frac{1007}{289} > m^2 - \frac{72m}{17} + \frac{1296}{289}$, ed estraendo la radice quadrata, io circa $\frac{67}{17} >$ m. Se si suppone poi, che $\frac{6m}{m^2+1} < \frac{19}{12}$, operando nello stesso modo, ritroveremo che $m > \frac{66}{19}$. Facciasi dunque $m = 3\frac{1}{2}$, averemo $9 - x^2 = 9 - 21x + 12\frac{1}{4}x^2$, cioè $21x = 13\frac{1}{4}x^2$, ovvero $\frac{84}{53} = x$; il di cui quadrato $= \frac{7056}{2809}$, e l'altro sarà per conseguenza $9 - \frac{7056}{2809} = \frac{18225}{2809}$. Se si sottra del primo quadro il 2, e dal secondo il 6, resteranno le due grandezze $\frac{2498}{2809}$ e $\frac{1371}{2809}$, che sommate assieme sono eguali all'unità.

PROBLEMA XLIX.

Ritrovare due quadrati, la somma de' quali essendo aggiunta al loro prodotto sia un quadrato perfetto.

Sia xx il primo di questi quadrati, ed yy il secondo; bisogna che $xxyy + xx + yy$ sia un quadrato perfetto. Per ritrovar la radice di questo quadrato, in cui xx è moltipli-

plicato per $yy+1$, facciasi $yy+1=yy-2yu+uu$, dalla qual'Equazione ne nasce che $y=\frac{uu-1}{2u}$, e per conseguenza $u-y=\sqrt{yy+1}=\frac{uu+1}{2u}$. Si prenda z per $\frac{uu+1}{2u}$ ovvero per $\sqrt{yy+1}$, affinchè la prima espressione sia abbreviata; allora $xxyy+xx=xxzz+yy$. E se si chiama $t-xz$ la radice del quadrato che si cerca, s'averà $xxzz+yy=tt-2txz+xxzz$, ovvero $2txz=tt-yy$, e $x=\frac{tt-yy}{2tz}$; sicchè ponendo per y e per z i suoi valori $\frac{uu-1}{2u}$ e $\frac{uu+1}{2u}$, allora $x=\frac{4tt\,uu-u^4+2u^2-1}{4tu^3+4tu}$. Ma affinchè y sia positivo, bisogna che $uu-1$ del suo valore sia positivo, e perciò u maggiore di 1. Parimente per avere il valore positivo di x, bisogna che il numeratore $4ttuu-u^4+2uu-1$ sia positivo, ovvero che $4ttuu$ sia maggiore di $u^4-2uu+1$, e per conseguenza la radice quadrata $2tu$ maggiore dell'altra quadrata radice $uu-1$, e $t>\frac{uu-1}{2u}$, ovvero il ch'è lo stesso, $u<t+\sqrt{tt+1}$.

Sup-

Suppongasi $s = 2$, $u = 3$; allora $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{4}{3}$, e $xxyy + xx + yy = \frac{169}{81}$, la di cui radice $= \frac{13}{9}$.

CAP. II.

Problemi di doppia Egualità.

PROBLEMA I.

Ritrovare una grandezza tale, che essendo moltiplicata per due grandezze note, e cadauna dei piani aumentato di una grandezza nota; ciascheduna di queste somme sia un quadrato perfetto.

Sia x la grandezza che si cerca, e a, b le grandezze note che hanno da essere moltiplicate con x. Sia pure la grandezza c da aggiungere al piano ax, e d al piano bx. Ora si supponga $ax + c = yy$, e $bx + d = zz$; sarà per conseguenza $ax = yy - c$ e $bx = zz - d$, ovvero $x = \frac{yy - c}{a} = \frac{zz - d}{b}$. Si moltiplichino i due ultimi membri per ab, che averemo poi $byy - bc = azz - ad$, e $byy = azz + bc - ad$ per conseguenza $yy = \frac{azz + bc - ad}{b}$.

I. Per tentare di risolvere questa Equazione,

zione, ficchè l' ignota y sia commensurabile, bisogna che a e b sieno due piani simili, ovvero il prodotto ab quadrato perfetto; ficchè allora $\frac{a}{b}$ è un quadrato perfetto. (*)

Sieno dunque a e b due piani simili, e pongasi $gg = \frac{a}{b}$; in tal caso $yy = \frac{azz + bc - ad}{b} = ggzz - ggd + c$. Facciasi $u - gz$ ovvero $gz - u$ per radice di questo quadrato, averemo $yy = ggzz - ggd + c = ggzz - 2guz + uu$, ovvero $2guz = uu + ggd - c$, e $z = \frac{uu + ggd - c}{2gu}$, ficchè ponendo $\frac{a}{b}$ in luogo di gg, s' averà il valore $z = \frac{buu + ad - bc}{2bgu}$.

La

(*) *Piani simili* sono quelli che hanno i loro componenti in ragione eguale. Così se $a = gh$, $b = sl$, e $g . h :: s . l$., i piani a e b sono simili; dunque a e b sono in duplicata ragione (come s' è detto nel Lib. IV.) cioè $a . b :: m^2 . n^2$. Sia p il maggiore comune divisore di a e b che abbia fatto nascere i quoti m^2, n^2, ed esponenti nel medesimo tempo di a e b; dunque $a = m^2 p$, $b = n^2 p$, e $ab = m^2 n^2 p^2$, quadrato perfetto, e parimenti $\frac{a}{b} = \frac{m^2 p}{n^2 p} = \frac{m^2}{n^2}$, altro perfetto quadrato.

La grandezza u è arbitraria, ma ella dee avere nulla dimeno certi limiti. Imperciocchè nell'Equazione $x = \frac{zz-d}{b}$, essendo positiva la grandezza $zz-d$, bisogna che zz sia maggiore di d, e z ovvero il suo valore $\frac{buu+ad-bc}{2bgu} > \sqrt{d}$; e moltiplicando da una parte e dall' altra per $2gu$, il prodotto $uu+\frac{ad}{b}-c$ (ovvero ponendo gg in vece di $\frac{a}{b}$) $uu+ggd-c > 2gu\sqrt{d}$: se poi si aggiunge $c-2gu\sqrt{d}$ da una parte e dall' altra, sarà ancora $uu-2gu\sqrt{d}+ggd > c$, ed estraendo la radice, $u-g\sqrt{d} > \sqrt{c}$, ovvero $u > g\sqrt{d}+\sqrt{c}$.

Sia $a=4$, $b=1$, $c=8$, $d=3$; sarà $g=2$, e si faccia $u=8$. Allora $z=\frac{17}{8}$, e per conseguenza $x=\frac{289}{64}-3=\frac{289-192}{64}=\frac{97}{64}$. Se si supponerà $a=b=1$, $c=2$, e $d=3$, verrà per conseguenza ad essere $g=1$; e facendo $u=4$; averemo parimente $x=\frac{97}{64}$: e questa è la Quest. 12. Lib. II. di Diofanto, ch' egli esprime e risolve nel modo seguente.

Dati due numeri aggiungere all' uno e all' altro un numero da ritrovarsi, e tale che faccia le somme quadrati perfetti.

I due numeri dati sieno 2 e 3, ed x quel che si cerca da aggiungere ai due dati in questo modo, $x+2$, e $x+3$; si prenda la differenza di queste somme ch'è 1, poi si ritrovino due numeri, i quali moltiplicati tra loro facciano 1. Allora la metà della somma di questi due generatori sarà la radice del quadrato maggiore, e la metà della differenza sarà la radice del quadrato minore. Bisogna però che sieno tali, sicchè il quadrato della metà della somma sia maggiore del più grande dei numeri dati. Sieno dunque questi generatori 4 e $\frac{1}{4}$, de' quali la somma è $\frac{17}{4}$ e la sua metà $\frac{17}{8}$; la differenza $\frac{15}{4}$ e la metà di questa differenza $\frac{15}{8}$; dunque il quadrato di $\frac{17}{8}$, ch'è $\frac{289}{64}=x+3$, e perciò $x=\frac{97}{64}$; come s'è ritrovato di sopra.

Se si esprimono questi generatori dell' unità colle lettere medesime, colle quali abbiamo di prima risoluto il Problema, si ritroverà che questi possono essere u, e $\frac{d-c}{u}$, il di cui prodotto è $d-c$ eguale ad 1 per ipotesi, e la somma $\frac{uu+d-c}{u}$; sarà dunque la metà di questa somma $\frac{uu+d-c}{2u}=z$

=

$= \frac{buu + ad - bc}{2bgu}$, perchè nell'ipotesi di Diofanto $a = b = g = 1$: lo che fa chiaramente vedere, che quelle operazioni che sono state taciute da Diofanto nella risoluzione di questo Problema, non differiscono dalle Cartesiane da noi poste in pratica.

II. Se poi le due grandezze a e b non sono due piani simili, nè ab un quadrato perfetto, ma sieno $bc - ad$, e b due piani simili, ovvero $bbc - abd$ un quadrato perfetto; facciasi $hh = \frac{bc - ad}{b}$, e $tz - h = y$, perchè allora $yy = \frac{azz + bc - ad}{b}$, come si aveva ritrovato, diverrà $yy = \frac{azz}{b} + hh = ttzz - 2ht + hh$, cioè $2hhtz = bttzz - azz$, e per conseguenza $z = \frac{2hht}{btt - a}$. Dunque l'arbitraria t è maggiore di $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Parimenti, siccome per le prime Equazioni s'è veduto che zz è maggiore di d; dunque z ovvero il suo valore $\frac{2hht}{btt - a}$ è maggiore di $\sqrt{d}$. Che se si moltiplica da una parte e dall'altra per $btt - a$ resterà $2hht$ maggiore di $btt\sqrt{d} - a\sqrt{d}$, e dividen-

dendo tutto per $b\sqrt{d}$, sarà $\frac{2bt}{\sqrt{d}}$ maggiore di $tt - \frac{a}{b}$, ovvero $\frac{a}{b}$ maggiore di $tt - \frac{2bt}{\sqrt{d}}$, e compiendo il quadrato, $\frac{a}{b} + \frac{bb}{d}$ maggiore di $tt - \frac{2bt}{\sqrt{d}} + \frac{bb}{d}$, così anche dopo estratta la radice $t - \frac{b}{\sqrt{d}}$ è maggiore di $\frac{b}{\sqrt{d}} + \sqrt{\frac{ad + bbb}{bd}} = \frac{b + \sqrt{c}}{\sqrt{d}}$.

Se si suppone $a=2$, $b=6$, $c=5$, $d=3$, sarà $b=2$; si ponga poi $t=1$, che averemo $x=\frac{11}{3}$, $y=4$, e $z=6$.

Altro Metodo.

Se nè l' una nè l' altra delle due preaccennate supposizioni dei piani simili si verificasse nel Problema, si potrebbe risolverlo in quest' altro modo.

Si supponga che $ax+c$ sia il più grande dei quadrati, e si chiami $2y$ la somma dei quadrati, $2z$ la differenza dei medesimi; ovvero $2z$ la somma, e $2y$ la differenza; la prima Equazione sarà $ax+c=yy+2yz+zz$,

$+zz$, e $x = \frac{yy + 2yz + zz - c}{a}$. La fecoonda Equazione farà $bx + d = yy - 2yz + zz$, e perciò $x = \frac{yy - 2yz + zz - d}{b} = \frac{yy + 2yz + z^2 - c}{a}$; moltiplicando poi tutto per ab, s' averà $ayy - 2ayz + azz - ad = byy + 2byz + bzz - bc$, ovvero $ayy - byy - 2ayz - 2byz + azz - bzz - ad + bc = 0$. Si divida questa Equazione per $a - b$, ed allora averemo $yy - \frac{2ayz - 2byz + azz - bzz - ad + bc}{a - b} = 0$, ovvero

$$yy - \frac{2ayz}{a - b} = \frac{bzz - azz + ad - bc}{a - b}, \text{ e perfe-}$$

$$- \frac{2byz}{a - b}$$

zionando il quadrato, poi estraendo la radice si ritroverà $y = \frac{az + bz}{a - b} + \frac{1}{a - b}$ $\sqrt{4abzz + aad - abc - abd + bbc}$.

In tal caso, se $ad - bc$ e $a - b$ sono due piani simili, ovvero se $aad - abc - abd + bbc$ e un quadrato perfetto; si prenda gg per questo quadrato, e $uz + g$ per la radice del quadrato ch'è scritto sotto il segno $\sqrt{}$; e l'Equazione farà $uuzz + 2guz + gg = 4abzz$

$4abzz + gg$, ovvero $2gu = 4abz - uuz$, e $z = \frac{2gu}{4ab - uu}$; in tal caso l'arbitraria u sarà minore di $2\sqrt{ab}$. Si suppone a maggiore di b, per causa del denominatore $a - b$. E poichè $y + z$ ovvero il suo valore $\frac{guu + 4agu + 4abg}{4aab - 4abb - auu + buu}$ è maggiore di $\sqrt{c}$: se si moltiplica da una parte e dall'altra per il denominatore, s'averà $guu + 4agu + 4abg$ maggiore di $4aab\sqrt{c} - 4abb\sqrt{c} - auu\sqrt{c} + buu\sqrt{c}$, ovvero $guu + auu\sqrt{c} - buu\sqrt{c}$ maggiore di $4aab\sqrt{c} - 4abb\sqrt{c} - 4agu - 4abg$. Dividasi di poi per $g + a\sqrt{c} - b\sqrt{c}$, che finalmente dopo di avere compiuto il quadrato, fatta la sostituzione del valore di gg, ed estratta la radice, resterà u maggiore di $\frac{2aa\sqrt{d} - 2ab\sqrt{d} - 2ag}{g + a\sqrt{c} - b\sqrt{c}}$.

Se si prende $a=3$, $b=1$, $c=13$, $d=7$; diverrà $g=4$. Si supponga ancora $u=2$; ed allora $x=29$, $y=8$, e $z=2$.

Terzo Metodo.

Se coi due altri metodi non si è potuto pervenire alla risoluzione del Problema, se la procuri in quest' altro modo.

Sieno

Sieno le grandezze note $2a$ e $2b$, le quali debbono moltiplicare la medesima ignota x, e c e d le due altre note da unirsi a i piani $2ax$, $2bx$; $x-y$ ovvero $y-x$ sia la radice del primo quadrato $2ax+c$, e $x-z$ ovvero $z-x$ la radice del secondo quadrato $2bx+d$.

La prima Equazione sarà $2ax+c=xx-2yx+y^2$. Dalla qual' Equazione, dopo la trasposizione di alcuni termini, l' aggiunta per compiere il quadrato, ed estratta la radice ec. si ritroverà il valore di $x=a+y+\sqrt{aa+2ay+c}$. Ma la grandezza $aa+2ay+c$ dev' essere un quadrato perfetto, ch' io chiamo uu, cioè $aa+2ay+c=uu$, e perciò $y=\frac{uu-aa-c}{2a}$.

La seconda Equazione è $xx-2xz+zz=2bx+d$, da cui operando come nella prima si ritrae il valore di $x=b+z+\sqrt{bb+2bz+d}$. E chiamando t la radice del quadrato posto sotto il segno radicale, l'Equazione sarà $bb+2bz+d=tt$, e perciò $z=\frac{tt-bb-d}{2t}$.

Ora ripigliando il valore di $x=a+y+u=b+z+t$; se si pone in luogo di y e di z i loro equivalenti, averemo $x=\frac{uu+2au+aa-c}{2a}=$

tt

$\frac{tt+2bt+bb-d}{2b}$. E moltiplicando i due ultimi membri per $2a$ si avrà $uu+2au+aa-c=\frac{att+2abt+abb-ad}{b}$, da cui, operando come sopra, si trae il valore di $u=-a+\frac{1}{b}\sqrt{abtt+2abbt+ab^3-abd+bbc}$. Ed allora se $ab^3-abd+bbc$ è un quadrato perfetto, che chiamerò gg; prendendo $tr-g$ per radice del quadrato ch'è sotto il segno $\sqrt{}$, l'Equazione diverrà $ttrr-2gtr+gg=abtt+2abbt+gg$, ovvero $trr-abt=2abb+2gr$, e $t=\frac{2abb+2gr}{rr-ab}$. Dunque l'arbitraria $r>\sqrt{ab}$. E affinchè x ovvero il suo valore $\frac{tt+2bt+bb-d}{2b}$ sia positivo, bisogna che $t+b$ ovvero che il suo valore $\frac{abb+2gr+brr}{rr-ab}>\sqrt{d}$; perciò $r>\frac{-g+b\sqrt{c}}{b-\sqrt{d}}$, se b è maggiore di $\sqrt{d}$: ma se b è minore di $\sqrt{d}$, sarà $r<\frac{g+b\sqrt{c}}{-b+\sqrt{d}}$.

Sup-

Supponiamo che sia $a=2$, $b=3$, $c=14$, $d=6$ farà per conseguenza $g=12$, ed $r > \frac{3\sqrt{14}-12}{3-\sqrt{d}}$. Si faccia $r=3$; allora $s=36$, $gx=252\frac{1}{2}$.

PROBLEMA LI.

Ritrovare una grandezza che essendo moltiplicata per un quadrato noto, ed il prodotto ricevendo prima un piano della medesima ignota per una grandezza nota, poi un piano della stessa ignota per un'altra grandezza nota, ciascheduna delle due somme sia un quadrato perfetto.

In questo Problema l'ignota ha due gradi. Si chiami x la grandezza ignota, ed a la radice del quadrato noto, b e c le due grandezze note che devono essere moltiplicate per x; saranno per tanto le due somme $aexx + bx$ e $aaxx + cx$ quadrati perfetti per la supposizione. Prendendo dunque $y - ax$ per radice del primo quadrato, e $z - ax$ per radice del secondo; la prima equazione sarà $aaxx + bx = aaxx - 2ayx + yy$, ovvero $2ayx + bx = yy$, e perciò $x = \frac{yy}{2ay+b}$. La seconda Equazione sarà $axx + cx = aaxx - 2axz + zz$, ovvero $2axz + cx = zz$, e $x = \frac{zz}{2az+c} = \frac{yy}{2ay+b}$, e molti-

tipli-

conda dalla prima, cioè il primo membro $cx+d$ dal primo membro $aaxx+bx+d$, e il secondo zz da yy, averemo $aaxx+bx-cx=yy-zz$. Confiderando attentamente questa Equazione, si rileva che $yy-zz$ è un piano fatto della somma $y+z$ delle radici y e z per la loro differenza $y-z$. Dal che si conclude, che si può ritrovare due grandezze, delle quali il piano sia $aaxx+bx-cx$, e tali che la metà della loro somma comprenda ax, radice del quadrato $aaxx$, acciocchè questo quadrato svanisca nella comparazione dei termini; e la metà della somma di queste due grandezze sarà eguale ad y, siccome altresì la metà della differenza sarà eguale a z, per ciò che s'è detto s. Cap. IV. Sez. I. Ora dividendo $aaxx+bx-cx$ per ax, il quoto sarà $ax+\frac{b-c}{a}$, e la metà della somma delle due grandezze ax e $ax+\frac{b-c}{a}$ è $ax+\frac{b-c}{2a}$ che si prenderà per y; la metà poi della differenza è $\frac{b-c}{2a}$, che si prenderà per z. Quindi comparando il quadrato yy ovvero il suo eguale $aaxx+bx+d$ con il quadrato $aaxx+bx-cx+\frac{bb-2bc+c^2}{4aa}$ di $ax+\frac{b-c}{2a}$ metà della somma

somma ovvero l'altro quadrato $cx+d=zz$ col quadrato $\frac{bb-2bc+cc}{4aa}$ di $\frac{b-c}{2a}$, metà della differenza, si ritroverà sempre un medesimo valore dell'ignota $x=\frac{bb-2bc+cc-4add}{4aac}$; bisogna però che il quadrato $bb-2bc+cc$ sia maggiore di $4aad$, acciocchè la risoluzione sia reale.

Sia $a=1$, $b=5$, $c=1$, e $d=2$, sarà $x=2$; dunque $y=4$, e $z=2$.

PROBLEMA LIII.

Se la doppia egualità sarà $axx+bx+d$ e $aaxx+cx+e$.

Si chiami $ax-y$ la radice del primo quadrato, e $ax-z$ la radice del secondo, sarà dunque la prima Equazione $aaxx-2axy+yy=aaxx+bx+d$, ovvero $2axy+bx=yy-d$, e $x=\frac{yy-d}{2yy+b}$.

La seconda Equazione sarà $aaxx-2axz+zz=aaxx+cx+e$, ovvero $2axz+zz-e$, e $x=\frac{zz-e}{2az+c}=\frac{yy-d}{2ay+b}$. Moltiplicando da una parte e dall'altra per $2az+c$ e per $2ay+b$ ave-

averemo $2ayzz + bzz - 2aey - be = 2ay^2z - 2adz + cyy - cd$, e trasportando di là tutt'i termini, ne' quali vi sia la grandezza z, e dividendo tutto per $2ay + b$, si compierà poi il quadrato, e si estrarrà la radice colla solita regola, e finalmente si giungerà a ritrovare

$$z = \frac{ayy - ad}{2ay + b} + \frac{1}{2ay + b}\sqrt{aay^4 - 2aadyy + aadd + 2acy^3 + bcyy + 4aaeyy + 4abey - 2acdy + bbe - bcd}.$$

Ma affinchè la grandezza ch'è sotto il segno radice sia un quadrato perfetto, determineremo per sua radice $ayy - ad + cy + \frac{bc - cc}{2a} + 2ae$, la quale farà svanire tutt'i termini, ne' quali vi sono più dimensioni. Averemo poi questa Equazione $aay^4 - 2aadyy + aadd + 2acy^3 + bcyy + 4aaeyy + 4abey - 2acdy + bbe - bcd = aay^4 - 2aadyy + aadd + 2acy^3 - 2acdy + ccyy + bcyy - ccyy + 4aaeyy + \frac{bccy - c^3y}{a} + 4acey - bcd + ccd - 4aade + 2bce - 2cce + 4aaee + \frac{bbcc - 2bc^3 + c^4}{4aa}$. E ordinando questa Equazione si averà $\frac{bccy - c^3y}{a} + 4acey - 4abey = 4aade + bbe - 2bce$ +

$+ 2cce - 4aace - ced - \frac{bbcc + 2bc^3 - c^4}{4aa}$. E moltiplicando ambidue i membri per $4aa$, acciocchè svaniscano le frazioni, s'averà $4abccy - 4ac^3y + 16a^3cey - 16a^3bey = 16a^4de + 4aabbe - 8aabce + 8aabce - 16a^4ee - 4aaccd - bbcc + 2bc^3 - c^4$, e dividendo ciaschedun membro per $4aae - cc$, si ritroverà finalmente $4acy - 4aby = 4aad - 4aae + bb - 2bc + cc$, e $y = \frac{4aad - 4aae + bb - 2bc + cc}{4ac - 4ab}$. La risoluzione dunque sarà positiva se $e > d$, e se lo stesso $c > b + 2a\sqrt{e - d}$, ovvero se $b > c$, e $b > \sqrt{cc + 4aad - 4aae}$; e il contrario sarà se $d > yy$.

Se $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$, e $d = 3$ $e = 1$, sarà $y = \frac{3}{2}$, e $x = \frac{1}{4}$. E col metodo di Diofanto facilmente si potrà risolvere questo Problema così.

La differenza dei due quadrati è $4x + 2$; si supponga che i componenti di questa grandezza sieno $4x + 2$, e 1: dunque il quadrato della metà di $4x + 3$, cioè il quadrato di $2x + \frac{1}{2}$ ch'è $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 4x^2 + 4x + 3$, per la regola di Diofanto accennata di sopra nel Problema L, dunque $x = \frac{1}{4}$, come s'aveva già ritrovato &c.

CAP. III.

Problemi di tripla Egualità.

PROBLEMA LIV.

Se si ha da risolvere una tripla Egualità $aa+bx$, $aa+cx$, $aa+$, ciascheduna delle quali grandezze abbia da essere un quadrato perfetto; si operi così.

Si chiami $a+by$ la radice del primo quadrato $aa+bx$, ed averemo questa Equazione $aa+bx=aa+2aby+bbyy$, e $x=2ay+byy$. Si ponga poi in luogo di x il suo valore $2ay+byy$ nella doppia Egualità $aa+cx$ e $aa+dx$, si ritroverà una doppia Egualità $aa+2acy+bcyy$, e $aa+2ady+bdyy$, la di cui risoluzione sarà simile a quelle del Capo precedente; facendo $xy-a$ radice del primo quadrato, e $xz-a$ quella del secondo ec.

NOTA.

La risoluzione della Egualità quadrupla dipende da un' Analisi molto più composta che quella di cui abbiamo trattato in questo Libro; sicchè inutile sarebbe in questo luogo farne alcun tentativo.

Quelle che il P. di Billy ha chiamate quadruple, quintuple, centuple ec. non sono che nomi,

nomi, i quali nulla cangiano nella natura della tripla Egualità; imperciocchè avendo egli supposto solamente due quadrati differenti l'uno dall'altro p. e. $aa+bx$, $ee+ex$, tutti gli altri da lui aggiunti non sono che un solo e medesimo quadrato moltiplicato successivamente per diversi quadrati intieramente noti: sicchè le sue Egualità quintuple, centuple ec. non sono altro che triple Egualità. In fatti si dee considerar come una Egualità del tutto semplice la tripla egualità $aa+bx$, $4aa+4bx$, $9aa+9bx$; poichè basta quadrare la sola grandezza $aa+bx$ per quadrare di poi tutte le altre che sono soltanto moltiplici della prima.

C A P. I.

Di alcuni altri Problemi, ne' quali si cercano almeno tre quadrati, o qualche cubo.

PROBLEMA LV.

Ritrovare tre quadrati perfetti, tali che l'eccesso del primo sopra il secondo sia all'eccesso del secondo sopra del terzo, come una grandezza nota è ad un'altra grandezza nota.

Sia x la radice del quadrato di mezzo, e $x+y$ la radice del più grande, e $x-z$ la

la radice del più picciolo; l'eccesso del primo quadrato $xx + 2xy + yy$ sopra il secondo xx è $2xy + yy$, e l'eccesso del secondo xx sopra del terzo $xx - 2xz + zz$ è $2xz - zz$.

Sia ancora il primo eccesso al secondo come c a d; la proporzione sarà dunque $2xy + yy . 2xz - zz :: c . d$, e moltiplicano i medj e gli estremi tra loro, averemo $2dxy + dyy = 2cxz - czz$, ovvero $2cxz - 2dyx = czz + dyy$, e $x = \frac{czz + dyy}{2cz - 2dy}$, nella quale ultima Equazione le due grandezze y e z sono arbitrarie. Ma siccome x ovvero il suo valore dev'essere maggiore di z; si moltiplichi da una parte e dall'altra per il denominatore $2cx - 2dy$, e allora $czz + dyy$ dovrà eccedere $2czz - 2dyz$ e $dyy > czz - 2dyz$, e finalmente $y > -z + \frac{z}{d}\sqrt{cd + dd}$. E acciocchè $2cz - 2dy$ sia positivo, lo stesso y dev'essere minore di $\frac{cz}{d}$.

Sia $c = 3$, $d = 1$, $z = 1$, $y = 2$, sarà allora $x = \frac{7}{2}$.

PROBLEMA LVI.

Ritrovare tre grandezze, sicchè avendo aggiunto la seconda al quadrato della prima, la terza al quadrato della seconda, e la prima al quadrato della terza, ciascheduna somma sia un quadrato perfetto.

Sia x la prima di quelle grandezze, y la seconda, e z la terza. Sia parimenti $x+u$ la radice del primo quadrato $xx+y$, $y+t$ la radice del secondo $yy+z$, e $z+s$ la radice del terzo $zz+x$; la prima Equazione sarà $xx+y=xx+2ux+u^2$, ovvero $y=2ux+uu$. La seconda Equazione $yy+z=yy+2ty+tt$, ovvero $2ty=z-tt$, e $y=\frac{z-tt}{2t}=2ux+uu$; e moltiplicando l' uno e l' altro membro per $2t$, si averà $z-tt=4tux+2tuu$, ovvero $z=4tux+2tuu+tt$. Finalmente la terza Equazione sarà $zz+x=zz+2sz+ss$, ovvero $2sz=x-ss$, e $z=\frac{x-ss}{2s}=4tux+2tuu+tt$; e moltiplicando per $2s$, l'equazione diverrà $x-ss=8stux+4stuu+2stt$, e $x-8stux=4stuu+2stt+ss$, e $x=\frac{4stuu+2stt+ss}{1-8stu}$. Perciò le grandezze s, t, u,

sono

sono arbitrarie, con tal restrizione però sicchè il solido stu dev' essere minore di $\frac{1}{8}$.

Ora sia $f=\frac{1}{4}$, $t=\frac{2}{3}$, e $u=1$, sarà per conseguenza $x=\frac{61}{12}$, $y=\frac{25}{16}$, e $z=\frac{61}{16}$ ec.

Con molta eleganza e brevità Diofanto scioglie questo Problema, ch'è del suo Lib. II. la Quest. XXXIII. Mette per primo di questi tre numeri 1 N, che noi chiameremo x; e poichè il doppio di qualsivoglia numero più l' unità aggiunto al quadrato dello stesso numero fa un quadrato perfetto, il secondo numero sia $2x+1$, e'l terzo $4x+3$. Ora il quadrato del primo più il secondo è x^2+2x+1, ed è quadrato perfetto; il quadrato del secondo più il terzo è $4x^2+8x+4$, ch'è parimenti un quadrato; e'l terzo più il primo è $16x^2+25x+9$, che non è quadrato. Nulladimeno si supponga questa grandezza eguale ad un quadrato, che abbia per radice $4x$ meno un certo numero di unità, il di cui quadrato sia maggiore di 9, p. e. $4x-4$; allora $16x^2+25x+9=16x^2-32x+16$, e $57x=7$, dunque $x=\frac{7}{57}$.

N O T A.

Quando Diofanto non può sciogliere i Problemi ne' quali si cercano tre quadrati colle regole ordinarie dell' Analisi come nel precedente, egli suppone noto uno dei tre

quadrati, poi ricerca i due altri colla sua Regola di doppia egualità, della quale di sopra abbiamo fatta menzione ec. Eccone uo' Esempio nel seguente Problema.

PROBLEMA LVII.

Ritrovare tre grandezze in proporzione geometrica continua, e tali che avendo sottratta una grandezza nota da cadauna, i residui sieno quadrati perfetti.

Si chiami xx la prima di queste grandezze igoote, xy la seconda, e yy la terza; e a sia la grandezza nota. Se si prende $x-z$ ovvero $z-x$ per radice del primo quadrato $xx-a$, e u per radice del secoodo $xy-a$, $t-y$ ovvero $y-t$ per radice del terzo $yy-a$, la prima Equazione sarà $xx-a=xx-2xz+zz$, ovvero $2xz=zz+a$, e $x=\frac{zz+a}{2z}$. La secooda Equazione sarà $xy-a=uu$, ovvero $x=\frac{uu+a}{y}=\frac{zz+a}{2z}$, e moltiplicando da una parte e dall' altra per $2yz$, averemo $2uuz+2az=zzy+ay$, e $y=\frac{2uuz+2az}{zz+a}$. Finalmente la terza

za Equazione sarà $tt - 2ty = yy - a$, ovvero $2ty = tt + a$, e $y = \frac{tt+a}{2t} = \frac{2uuz + 2az}{zz+a}$.
Ma siccome in progresso delle comparazioni, l' ignote s' alzano ancora a gradi maggiori, così per evitare questo, si prenderà z per u, e l' ultima Equazione diverrà $y = \frac{tt+a}{2t} = \frac{2z^3 + 2az}{z^2+a} = 2z$, e per conseguenza $z = \frac{tt+a}{4t}$.

Questa risoluzione abbenchè paja infinita, ella non è tale però, a cagione delle restrizioni che si sono fatte nelle supposizioni, obbligando a prendere i due quadrati xx, yy; per estremi, ed a scegliere $x - u$, e u per radici dei due primi quadrati; lo che è uno dei metodi più ordinarj di Diofanto in simili Problemi.

Col Metodo di Diofanto.

Sia 12 il numero dato; il primo dei tre che si cercano x^2, e 'l terzo $12\frac{1}{4}$, numero quadrato, e che resta quadrato dopo di essere diminuito di 12; il secondo cioè il medio sarà dunque la radice di $12\frac{1}{4}$, ch' è $3\frac{1}{2}$, moltiplicata in x, radice del primo,

farà (dico) $3\frac{1}{2}x$. Bisogna poi che $x^2 - 12$, e $3\frac{1}{2}x - 12$ sieno due quadrati; lo che costituisce il Problema di doppia egualità, e perciò bisogna scioglierlo colla regola sopraccennata.

La differenza di questi due quadrati è $x^2 - 3\frac{1}{2}x$, i producenti della quale sono x, $x - 3\frac{1}{2}$; la differenza di queste due ultime grandezze è $3\frac{1}{2}$, e $\frac{7}{4}$ la metà della medesima; dunque per la regola sopradetta $\frac{49}{16} = 3\frac{1}{2}x - 12$, cioè $\frac{241}{16} = 3\frac{1}{2}x$, e $\frac{241}{56} = x$ ec. E questa è la Quest. I. del Libro V. di Diofanto.

PROBLEMA LVII.

Ritrovare due cubi, la somma de' quali sia eguale alla differenza di due cubi noti.

Sia a la radice del cubo noto più grande, e b sia la radice del più picciolo; la differenza dunque di questi due cubi sarà $a^3 - b^3$. Si chiami $a - x$ la radice del primo dei due cubi che si cercano, e il cubo di questa radice sarà $a^3 - 3a^2x + 3axx - x^3$. Ora per far svanire $-3aax$ e $-b^3$ quando si paragonano i termini, si prenda $\frac{aax}{bb} - b$ per radice del secondo quadra-

to ignoto, della quale il cubo sarà $\frac{a^6 x^3}{b^6}$ $-\frac{3a^4 xx}{b^3}+3aax-b^3$;

Si unisca tutti due questi Cubi, e si averà la seguente Equazione $a^3-3aax+3axx-x^3+\frac{a^6 x^3}{b^6}-\frac{3a^4 xx}{b^3}+3aax-b^3=a^3-b^3$, ovvero $\frac{a^6 x^3}{b^6}-x^3=\frac{3a^4 xx}{b^3}-3axx$, e moltiplicando tutto per b^6, averemo $a^6 x^3-b^6 x^3=3a^4 b^3 xx-3ab^6 xx$, poi dividendo da una parte e dall'altra per $a^3 xx-b^3 xx$, rimanerà $a^3 x+b^3 x=3ab^3$, ovvero $x=\frac{3ab^3}{a^3+b^3}$, dunque $a-x=\frac{a^3-2ab^3}{a^3+b^3}$ ec. Sicchè la risoluzione sarà positiva, se a^3 sarà maggiore di $2b^3$.

Facciasi $a=2$, $b=1$, sarà $x=\frac{2}{3}$, dunque $a-x=\frac{4}{3}$ e $\frac{aax}{b}-b=\frac{2a^3 b-b^4}{a^3+b^3}=\frac{5}{3}$.

COROLLARIO.

Per dividere un Cubo dato in tre altri Cubi.

Si prenda a^3 per il cubo dato, e sia x^3 uno di quelli che si cercano; dunque $a^3 - x^3$ sarà la somma dei due altri, de' quali le sue radici per il precedente Problema (cambiando b in x) saranno $\frac{a^4 - 2ax^3}{a^3 + x^3}$, e $\frac{2a^3x - x^4}{a^3 + x^3}$, e la terza, esprimendola collo stesso denominatore, $x = \frac{a^3x + x^4}{a^3 + x^3}$, cioè in numeri, stando colle supposizioni di sopra, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{3}$, de' quali i cubi sono $\frac{64 + 125 + 27}{27} = 8 = a^3$.

NOTA.

Nei Problemi che abbiamo risoluto potrà il Lettore rilevare, quanta perspicacia vi abbisogna per risolvere i Problemi di semplice, di doppia egualità ec. Quelli che abbiamo qui posti, sono stati tratti dagli

Ele-

Elementi delle Matematiche del Padre Prestet, e sono tanti, quanti possono bastare a dar un' idea del suo metodo; chi desideraffe qualche cosa di più, potrà consultare l'Autore ec. Prima di dar fine a questo Libro, vi aggiungiamo un'altro Problema, ch'è del Libro V. di Diofanto la Questione 19. nella di cui risoluzione pretende il P. Prestet di avere scoperte le vestigie secrete dell' Analisi di Diofanto, e le supposizioni ed operazioni, ch' egli ha taciute. Estenderemo di Prestet e di Diofanto la risoluzione per far nota, se sia possibile, più sensibilmente questa verità.

PROBLEMA LVIII.

Ritrovare tre grandezze, sicchè ciascheduna essendo sottratta dal cubo della loro somma, li residui sieno cubi perfetti.

Sia zy la prima grandezza, zx la seconda, zu la terza, e zt la somma di tutte tre; zs la radice del primo dei tre cubi, zr la radice del secondo cubo, e zq la radice del terzo. La prima Equazione sarà $z^3t^3 - zy = z^3s^3$ ovvero $zy = z^3t^3 - z^3s^3$; la seconda Equazione $z^3t^3 - zx = z^3r^3$, ovvero $zx = z^3t^3 - z^3r^3$; e la terza $z^3t^3 - zu = z^3q^3$, ovvero $zu = z^3t^3 - z^3q^3$: dunque $zy + zx + zu = 3z^3t^3 - z^3s^3 - z^3r^3 - z^3q^3 = zt$, e dividendo per z, averemo $y + x + u = 3z^2t^3 - z^2s^3 - z^2$

$z^2r^3 - z^2y^3 = t$. Prendasi pp in cambio di t, e si divida i due ultimi membri dell'equazione per zz, dopo di che si averà $3p^6 - s^3 - r^3 - q^3 = \frac{pp}{zz}$; e supponendo $pp - n = s$ e la somma $r^3 + q^3$ di due altri cubi eguale alla differenza di due cubi, le radici de' quali sieno $pp - 2n$ e $3n$; se nell'Equazione ultima si porrà in luogo di s il suo valore $pp - n$, e in luogo di $r^3 + q^3$ la differenza $p^6 - 6p^4n + 12ppnn - 35n^3$ dei cubi di $pp - n$ e $3n$, si formerà l'Equazione

$$p^6 + 9p^4n - 15ppnn + 36n^3 = \frac{pp}{zz}.$$

Ora sia $p^3 + 3pn$ la radice di questo quadrato, sicchè averemo $p^6 + 9p^4n - 15ppnn + 36n^3 = p^6 + 6p^4n + 9ppnn$, ovvero $-3p^4 = 36nn - 24ppn$, o $-p^4 = 12nn - 8ppn$, della quale ultima Equazione compiendo il quadrato, ed estraendo poi la radice, si ritroverà $n = \frac{1}{3}pp + \sqrt{\frac{1}{9}p^4 - \frac{1}{12}p^4} = \frac{1}{2}pp$, ed ancora $n = \frac{1}{3}pp - \sqrt{\frac{1}{9}p^4 - \frac{1}{12}p^4} = \frac{1}{6}pp$. Si prenda questo valore $\frac{1}{6}pp$ in cambio di n (poichè il primo $\frac{1}{2}pp$ darebbe $pp = 2n$, lo che non sarebbe a proposito), si ritroverà finalmente $z = \frac{2}{3pp}$. E le radici dei cubi, de' quali la differenza è eguale ad r^3 $+ q^3$,

$+ q^3$, faranno $pp - 2n = \frac{4}{6}p^6$, e $3n = \frac{3}{6}p^6$; dunque i due cubi di queste radici faranno $\frac{64p^6}{216}$ e $\frac{27p^6}{216}$. Non vi resta altro dunque che dividere la differenza di questi due cubi ne' due cubi r^3 e q^3, cioè $r^3 + q^3 = \frac{64p^6 - 27p^6}{216}$; e per il Problema precedente si ritrova $r = \frac{40pp}{546}$, e $q = \frac{303\,pp}{546}$. Supponiamo l' arbitraria $p = 1$, e allora averemo $r = \frac{40}{546}$, e $q = \frac{303}{546}$; e poichè $f = pp - n = \frac{5}{6}p$, sarà $f = \frac{5}{6}$. S' è anche fatto $s = pp$; sarà dunque $s = 1$: e perciò $zy + zx + zu = \frac{2}{3} = zt$.

Metodo di Diofanto.

Sia x la somma di tutti tre i numeri che si cercano, e i numeri sieno $\frac{7}{8}x^3$, $\frac{26}{27}x^3$, $\frac{61}{64}x^3$; per la prima condizione $\frac{7}{8}x^3 + \frac{26}{27}x^3 + \frac{61}{64}x^3 = \frac{4877}{1728}x^3 = x$, e dividendo per x, resterà $\frac{4877}{1728}x^2 = 1$. Ora 1 e quadrato perfetto; bisogna che lo sii anche $\frac{4877}{1728}x^2$. Supponiamo, che questo numero di quadrati sia noto sottraendo dal numero 3 tre cubi, ogni uno de' quali sia minore dell' uni-

unità, e si supponga ancora che la somma di questi tre cubi sia minore dell' unità; allora il quadrato che resterà, dovrà essere maggiore di 2.

Se prendiamo $2\frac{1}{4}$ per questo quadrato, bisognerà poi dividere in tre cubi il residuo $\frac{1}{4}$, overo qualunque altra frazione eguale a questa, che abbia per denominatore un cubo, p. e. $\frac{162}{216}$, perchè in tal caso basta dividere 162 in tre cubi. Ma 162 è composto del cubo 125, e di 37, differenza dei cubi 27 e 64, questa differenza dunque è eguale ai due cubi $\frac{64000}{753571}$ e $\frac{27818127}{753571}$; dunque $162 = 125 + \frac{64000}{753571} + \frac{17818127}{753571}$, e $\frac{162}{216} = \frac{125}{216} + \frac{8000}{20346417} + \frac{1030301}{6028568}$. Si sottri cadauno di questi cubi dall'unità, e resterà poi $\frac{91}{216} + \frac{20338417}{20346417} + \frac{4908267}{6028568} = 2\frac{1}{4}$; dunque se supporremo che i numeri che si cercano sieno $\frac{91}{216}$ x3

+

$$+ \frac{20338417}{20346417} x^3 + \frac{4908267}{6028568} x^3 = x = 2\tfrac{1}{4} x^3,$$

ritroveremo $x = \frac{2}{3}$, come ſopra.

Dalla invenzione dei tre cubi eguali a 162 fino alla riſoluzione del Problema ſi ſiamo ſcoſtati dal teſto di Diofanto, ch' è oſcuriſſimo, ed abbiamo ſeguito il comento di Bacheto, perchè ci è paruto che il teſto di Diofanto altrimenti non poſſa ſignificare.



M 2

METODO
DI GIOVANNI PELLIO

per risolvere il Problema.

Nel secondo Tomo delle Opere Matematiche di Giovanni Vallis, questo Problema è risoluto col metodo di Giovanni Pellio. Ho pensato di trascrivere questa risoluzione, perchè il Lettore abbia un picciolo saggio dell' Algebra di questo Valentuomo, e del suo metodo nella risoluzione dei Problemi.

Egli segna le grandezze ignote colle lettere minute, e principia dalle prime dell' alfabetto, e va progredindo, fino che dopo averle comparate colle grandezze note, ch' egli nota colle cifre o caratteri arabi, ne ritrava il suo valore espresso colle cifre, ed allora le segna colle lettere majuscole. Fa uso dei segni algebraici, che abbiamo già spiegato; ad eccezione di questo $\div$, che prende per segno di divisione, e di due altri inusitati per esprimere che una grandezza è innalzata a Potenza, o che se gli è estrata la radice.

Ecco la risoluzione del Problema nella seguente Tavola, da cui in una occhiata si potrà

trà vedere molto di più di ciò, che con molte parole non abbastanza si potrebbe indicare. Nella colonna a dritta sono poste tutte l' Equazioni, che per le supposizioni e per artificio sono state fatte, numerate colle cifre nella picciola colonnetta di mezzo; e gli asterischi o stellette poste a' numeri 5, 6, 7, indicano, che il Problema è indeterminato, e che altrettante si possono di poi formare ad arbitrio nuove Equazioni come ne' num. 13, 17, 29, con tali restituzioni però, quali le condizioni del Problema il richiedono. Nella colonna a sinistra vi sono prima poste in ordine e dirimpetto alle Equazioni le grandezze che si cercano, di poi s'indicano, da quali antecedenti cose si deducono le nuove Equazioni. P. E. dirimpetto il num. 13. v'è 5 (*), cioè una Equazione arbitraria in luogo di quella che manca al numer. 5, al num. 14. v'è 11 C, cioè una Equazione che nasce dal cubo dell' undecima; in faccia n. 19 v'è 18 — 14, cioè una Equazione nata sottrando la decimaquarta dalla 18 &c.

PRO-

PROBLEMA.

Ritrovare tre numeri, ogni uno de' quali sottratto dal cubo della somma di tutti lasci un cubo perfetto.

$a=?$	1	$a+b+c=d$
$b=?$	2	$ddd-a=eee$
$c=?$	3	$ddd-b=fff$
$d=?$	4	$ddd-c=ggg$
$e=?$	5	(*)
$f=?$	6	(*)
$g=$	7	(*)
$ddd-2$	8	$a=ddd-eee$
$ddd-3$	9	$b=ddd-fff$
$ddd-4$	10	$c=ddd-ggg$
$n=?$	11	Sia $e=p-n$
$p=?$	12	Sia $f=4n-p$
5(*)	13	Sia $g=2n$
11 C	14	$eee=p^3-3p^2n+3pn^2-n^3$
12 C	15	$fff=-p^3+12p^2n-48pn^2+64n^3$
13 C	16	$ggg=8nnn$
6(*)	17	Sia $d=4n$
17 C	18	$ddd=64nnn$
18 — 14	19	$ddd-eee=65n^3-3pn^2+3p^2n-p^3$
18 — 15	20	$ddd-fff=+48pn^2-12p^2n+p^3$
18 — 16	21	$ddd-ggg=56nnn$

18 e 19	22	$a = +65n^3 - 3pn^2 + 3p^2n - p^3$
9 e 20	23	$b = 48pn^2 - 12p^2n + p^3$
10 e 21	24	$c = 56nnn$
22+23+24	25	$a+b+c = 121n^3 + 45pn^2 - 9p^2n$
1 e 25	26	$d = 121n^3 + 45pn^2 - 9p^2n$
26 e 17	27	$121n^3 + 45pn^2 - 9p^2n = 4n$
27 ÷ n	28	$121n^2 + 45pn - 9p^2 = 4$
7 (*)	29	Sia $11n + p = z$
29 Q	30	$121n^2 + 22pn + p^2 = 4$
28 — 30	31	$23np - 10pp = 0$
31 ÷ p	32	$23n - 10p = 0$
32 + 10p	33	$23n = 10p$
33 ÷ 10	34	$p = \frac{23n}{10} = \frac{23}{10}n$
34 — n	35	$p - n = \frac{13n}{10} = \frac{13}{10}n$
11 e 35	36	$e = \frac{13}{10}n$
.	37	$4n = \frac{40n}{10}$
37 — 34	38	$4n - p = \frac{17n}{10}$
12 e 28	39	$f = \frac{17}{10}n$
13	40	$g = \frac{20}{10}n$

36 C	41	$eee = \frac{2197n^3}{1000}$
39 C	42	$fff = \frac{4913n^3}{1000}$
40 C	43	$ggg = \frac{8000n^3}{1000}$
18	44	$ddd = \frac{64000n^3}{1000}$
44 — 41	45	$d^3 - eee = \frac{61803n^3}{1000}$
44 — 42	46	$d^3 - f^3 = \frac{59087n^3}{1000}$
44 — 43	47	$d^3 - g^3 = \frac{56000n^3}{1000}$
8 e 45	48	$a = \frac{61803n^3}{1000}$
9 e 46	49	$b = \frac{59087n^3}{1000}$
10 e 47	50	$c = \frac{56000n^3}{1000}$
48 + 49 + 50	51	$a + b + c = \frac{176890n^3}{1000}$
1 e 51	52	$d = \frac{17689n^3}{100}$

52 e

52 c 17	53	$\frac{17689\,n^3}{100} = 4n$
53 ÷ *n*	54	$\frac{17689\,n^2}{100} = 4$
54 √	55	$\frac{133\,n}{10} = 2$
55 × 10	56	$133\,n = 20$
56 ÷ 133	57	$N = \frac{20}{133}$
57 × 2	58	$2\,N = \frac{40}{133}$
58 × 2	59	$4\,N = \frac{80}{133}$
57 ÷ 10	60	$\frac{N}{10} = \frac{2}{133}$
60 C	61	$\frac{NNN}{1000} = \frac{8}{2352637}$

		Risposte.
48 e 61	62	$A=\frac{61803\times8}{2352637}=\frac{494424}{2352637}$.
49 e 61	63	$B=\frac{59087\times8}{2352637}=\frac{472696}{2352637}$
50 e 61	64	$C=\frac{56000\times8}{2352637}=\frac{448000}{2352637}$
17 e 59	65	$D=\frac{89}{133}$.
36 e 60	66	$E=\frac{26}{133}$
39 e 60	67	$F=\frac{34}{133}$
13 e 58	68	$G=\frac{40}{133}$
57		$N=\frac{20}{133}$
34 e 60	69	$P=\frac{46}{133}$

		Pruove.
62+63+64	70	$A+B+C=\frac{1415120}{2352637}$
	71	$\frac{1415120}{2352637}=\frac{17689\times80}{17689\times133}=\frac{80}{133}$
65 C	72	$DDD=\frac{512000}{2352637}$
66 C	73	$EEE=\frac{17576}{2352637}$
67 C	74	$FFF=\frac{39304}{2352637}$
68 C	75	$GGG=\frac{64000}{2352637}$
72 — 62	76	512000 — 494424 = 17576
72 — 63	77	512000 — 472696 = 39404
72 — 64	78	502000 — 448000 = 64000

Per dire qualche cosa sopra l'arteficio di questa risoluzione, bisogna notare per quali ragioni sieno state introdotte l' Equazioni 11, 12, 13, 17, 29. Imperciocchè nell'Equazione 11 è stato posto p col segno +, e nella 12 col segno —, acciò nelle comparazioni che si fanno di esse a' numer. 14, 15, e 19, 20, 22, 23; $+p^3$ e $-p^3$ si anulli-

no tra di loro, e e l' Equazione che prima er cubica, s' abbassi e divenga quadrata. Parimenti per la sostituzione delle lettere n, p nelle Equazioni 11, 12, 13, svaniscono le lettere e, f, g, e nella Equazione 17 la lettera d; sicchè colle sole n e p tutte le altre grandezze si esprimono. Finalmente per ritrovare queste due lettere si determina ad arbitrio il valore della Equazione 29, e alla Equazione 34 svanisce p, e finalmente nella Equazione 57 si ha N perfettamente noto, e col di lui mezzo tutte le altre grandezze cercate. Così nelle Equazioni 12 e 17 s' è posto $4n$, e $2n$ nella Equazione 13, e $1n$ nella Equazione 11, acciocchè nella Equazione 20 svanisca n^3, e nella Equazione 28 vi sia $121nn$, e 4 numeri quadrati. Similmente nell' Equazione 29 è stato posto $11n$ e 2, perchè i quadrati di queste due grandezze distrugano i quadrati simili, che sono nella Equazione 28.

Per escludere nella risoluzione le grandezze negative, conviene esaminare con qual numero dev' essere moltiplicata la lettera p della Equazione 29, acciocchè tanto e che f sia maggiore di zero. Pellio sostituisce alla Equazione 29, questa $11n + 9p = + 2$ ovvero $- 2$, e riprende le antecedenti Equazioni 11, 12, e 28.

	11	$e = p - n$
	12	$f = 4n - p$
	28	$121 n^2 + 45 np - 9p^2 = 4$
29	79	$11 n + qp = + 2$ ovvero $- 2$
79 Q	80	$121 n^2 + 22 qnp + q^2 p^2 = 4$
28 — 80	81	$45np - 9pp - 22qnp - qqpp = 0$
81 ÷ p	82	$44 n 9 p - 22 qn - qqp = 0$
72 + +	83	$45 n - 22 qn = 9p + qqp$
83	84	$n . p :: 9 + qq . 45 - 22 q$
Scopo 1°.	85	$e = 0$
11 e 85	86	$p - n = 0$
86 + n	87	$p = n$
84 e 87	88	$9 + qq = 45 - 22 q$
88 + —	89	$qq + 22 q = 36$
89 + 121	90	$qq + 22 q + 121 = 157$
90 $\sqrt{}$	91	$q + 11 = +$ ovvero $- \sqrt{157}$
91 — 11	92	$Q = - 11 + \sqrt{157}$
91 — 11	93	$Q = - 11 - \sqrt{157}$
.	94	$\sqrt{157} = 12.529964$ ec.
92 e 94	95	$Q = + 1.529964$ ec.
93 e 94	96	$Q = - 23.529964$ ec.
95 e 96	97	*Dunque* Q tra $1 \frac{529}{1000}$ ec. e $- 23 \frac{529}{1000}$ ec. fa $E > 0$
95 e 96	98	Q non tra questi limiti fa $E < 0$

Sco-

Scopo 2°.	99	$f = 0$
12 e 99	100	$4n - p = 0$
100 + p	101	$4n = p$
84	102	$4n . p :: 36 + 4qq . 45 - 22q.$
101 e 102	103	$36 + 4qq = 45 - 22q$
103 + —	104	$4qq + 22q = 9 = \frac{36}{4}$
104 + $\frac{121}{4}$	105	$4qq + 22q + \frac{121}{4} = \frac{157}{4}$
105 √	106	$2q + \frac{11}{2} = \frac{+ \text{ ovvero } - \sqrt{157}}{2}$
106 ÷ 2	107	$q + \frac{11}{4} = \frac{+ \text{ ovvero } - \sqrt{157}}{4}$
107 − $\frac{11}{4}$	108	$Q = \frac{-11 + \sqrt{157}}{4}$
107 − $\frac{11}{4}$	109	$Q = \frac{-11 - \sqrt{157}}{4}$
95 ÷ 4	110	$Q = +0.382491$ ec.
95 ÷ 4	111	$Q = -5.882491$ ec.
110 e 111	112	*Dunque* Q tra $+\frac{382}{1000}$ ec. e $-5\frac{882}{1000}$ ec. fa $F < 0$
110 e 111	113	Q non tra questi limiti fa $F > 0$.

97 e 112	114	Sarà dunque tanto E quanto F maggiore di o, se si prenderà *Q* tra + 1.529964 ec. e + 0.382492 ec. ovvero tra — 5.882491 e — 23.529964 ec.
114	115	*Q* può essere 2 ; ovvero qualsivoglia frazione tra $\frac{1.529964}{1.000000}$ ec. e $\frac{0.382491}{1.000000}$ ec.
114	116	*Q* può essere qualunque degli 18 intieri che sono tra — 5 e — 24, ovvero tra $\frac{-5.88291}{1.00000}$ ec. e $\frac{-23.529964}{1.000000}$ ec.
	117	Sia P. E. $q = \frac{3}{2}$ ch'è la frazione, scritta in piccioli numeri, prossimamente minore di 1. 529 ec. ovvero $q = -6$ ch'è l'intiero prossimamente vicino dopo — 5. 882 ec.

Egli

Egli ne deduce di poi che che ne nasca dalle due ultime supposizioni ; e in fine vi aggiunge alcune Tavole colle quali si avanza a ristringere altri casi : le quali cose tutte può, chiunque desidera, vederle nelle di lui Opere. Noi le abbiamo lasciate, perchè abbiamo detto a bastanza per dare una idea dell' Analisi Pelliana ; e perchè persuasi siamo, che il Lettore dopo che averà bene esaminato questo Esempio s' indurrà facilmente a dare la preferenza all' Analisi di Cartesio come più elegante, e al metodo di Prestet come più semplice sopra quello di Pellio.

N o t a.

Siccome abaiamo parlato dell' Analisi e dei metodi di sciogliere i Problemi dei più valenti Autori, così per dare l' ultima mano a questo Trattato, conviene che qualche cosa diciamo dell' Analisi e del Metodo di Francesco Vieta, ch' è il primo Inventore di esprimere le grandezze di qualunque sorta con lettere. Un Esempio farà brievemente e chiaramente intendere tutto questo.

Conoscendo il piano di due grandezze e il loro rapporto, ritrovare queste due grandezze.

Sia B il piano di queste due grandezze,

la

la più grande delle quali sia A ed essa sia alla più picciola come S ad R. Egli prende le consonanti per determinare le grandezze note, e le vocali per le grandezze ignote. Essendo dunque S ad R come A ad $\frac{\text{R in A}}{\text{S}}$, la grandezza più picciola sarà $\frac{\text{R in A}}{\text{S}}$, e'l piano B eguale a $\frac{\text{R in A quad.}}{\text{S}}$

Che tutto sia moltiplicato per S, e si averà R in A quad. eguale al piano S in B. E l'Equazione essendo ridotta in una proporzione, si ritroverà che S è ad R come il piano B al quadrato di A ec.

Questo Problema è stato proposto e risoluto presso poco nello stesso modo che il propose e risolvè Vieta medesimo.

Bisogna confessare ch' egli ha il primo merito di avere inventato il metodo di esprimere le grandezze in un modo generalissimo, ma bisogna altresì francamente dire, che il suo metodo non è sì pulito come quello di Cartesio; oltre di che si rileva nella risoluzione degli altri suoi Problemi, ch' egli non è del tutto analitico, supponendo spesse volte delle cose perfettamente note per la Sintesi, che non apparisçono intieramente chiare, e sviluppa-

te

te col mezzo delle suppofizioni fatte dal Problema, abbenchè dipendano come confeguenze: lo che è un difetto confiderabilissimo.

Fine del Tomo Secondo.





